关于分次环的分次性质和非分次性质*

张 圣 贵
(福建师范大学数学系，福州 350007)

摘　要:本文证明了对有限群分次环 R 而言,下列条件等价:
(1)　R 是左 gr-自内射环(左 gr-PF 环,左 gr-QF 环,左 gr-线性紧环).
(2)　R 是左自内射环(左 PF 环,左 QF 环,左线性紧环).
(3)　$R\#G^*$ 是左自内射环(左 PF 环,左 QF 环,左线性紧环).

关键词:左 gr-自内射环;左 gr-PF 环;左 gr-QF 环;左 gr-线性紧环.
分类号:AMS(1991) 16D90/CLC O153.3
文献标识码:A　　　**文章编号**:1000-341X(1999)04-0723-04

0　符号与术语

设 G 是一个有限群,ε 是 G 的单位元,$R=\bigoplus_{g\in G}R_g$ 是有单位元的 G-型分次环,$R\#G^*$ 是 R 的 Smash 积,$M_G(R)$ 表示 R 上的由 G 的元素作为行标和列标的矩阵环. $T=R_\varepsilon$. 设 xe_g 表示第 g 个分量为 x 而其余分量为零的列向量,$e(g,h)$ 表示 (g,h)-位置取 R 的单位元而其余位置取 R 的零元的 $|G|\times|G|$ 矩阵. 对于每个分次左 R-模 $M=\bigoplus_{g\in G}{}_gM$,令 $(M)^\#=\bigoplus_{g\in G}{}_gMe_g$,则 $(M)^\#$ 关于矩阵的加法和矩阵的乘法构成左 $R\#G^*$-模. 对于每个左 $R\#G^*$-模 N,记 $(N)_{gr}=\bigoplus_{g\in G}e(g,g)N$,则 $(N)_{gr}$ 构成分次左 R-模. 把每个左 R-模同态 $f:M\to N$ 自然地看成左 $R\#G^*$-模同态 $(f)^\#:(M)^\#\to(N)^\#$. 把每个左 $R\#G^*$-模同态 $f:M\to N$ 自然地看成分次左 R-模同态 $(f)_{gr}:(M)_{gr}\to(N)_{gr}$. 则 $(\ )^\#:R\text{-}gr\to R\#G^*\text{-mod}$ 和 $(\ )_{gr}:R\#G^*\text{-mod}\to R\text{-}gr$ 是互逆的函子[3].

1　gr-自内射性与自内射性

引理 1.1　R 是左 gr-自内射环当且仅当 $R\#G^*$ 是左自内射环.

证明　设 R 是左 gr-自内射环,因为

$$\mathrm{Hom}_{R-gr}(M,(g)R)=\mathrm{Hom}_{R-gr}((g^{-1})M,R),$$

所以 $(g)R$ 是左 gr-内射模. 设 I 是 $R\#G^*$ 的任意一个左理想,$i:I\to R\#G^*$ 是自然内射,$\varphi:I\to$

* **收稿日期**:1996-11-12
基金项目:福建省自然科学基金资助项目(A97014)
作者简介:张圣贵(1962-),男,福建建阳人,硕士,福建师范大学副教授. 研究方向为环论.

$R\#G^*$是任一左$R\#G^*$-同态，则$(i)_{gr}:(I)_{gr}\to(R\#G^*)_{gr}$是单的分次左$R$-同态，$(\varphi)_{gr}:(I)_{gr}\to(R\#G^*)_{gr}$是分次左$R$-同态. 由[7,引理 2]得，${}_R(R\#G^*)_{gr}\cong {}_R(\bigoplus_{g\in G}(g)R)$. 因为$G$是有限群，所以$\bigoplus_{g\in G}(g)R$是左 gr-内射的，因此$(R\#G^*)_{gr}$是左 gr-内射的，故存在分次左$R$-同态$\psi:(R\#G^*)_{gr}\to(R\#G^*)_{gr}$使得$\psi\circ(i)_{gr}=(\varphi)_{gr}$. 则存在$(\psi)^{\#}:R\#G^*\to R\#G^*$使得$(\psi)^{\#}\circ i=\varphi$. 因此$R\#G^*$是左自内射环.

反之，若$R\#G^*$是左自内射环，则$R\#G^*e(\varepsilon,\varepsilon)$是内射左$R\#G^*$-模. 设$I$是$R$的任意一个分次左理想，$i:I\to R$是自然内射，$\varphi:I\to R$是任一分次左$R$-同态，则$(i)^{\#}:(I)^{\#}\to(R)^{\#}$是单的左$R\#G^*$-同态，$(\varphi)^{\#}:(I)^{\#}\to(R)^{\#}$是左$R\#G^*$-同态. 由[7,引理 2]得，$(R)^{\#}\cong R\#G^*e(\varepsilon,\varepsilon)$，从而$(R)^{\#}$是内射左$R\#G^*$-模，故存在一个左$R\#G^*$-同态$\psi:(R)^{\#}\to(R)^{\#}$使得$\psi\circ(i)^{\#}=(\varphi)^{\#}$，因此存在分次左$R$-同态$(\psi)_{gr}:R\to R$使得$(\psi)_{gr}\circ i=\varphi$，故$R$是左 gr-自内射环.

引理 1.2 R是左 gr-自内射环当且仅当R是左自内射环.

证明 由引理 1.1 和[4,Proposition 4.7]知，R是左 gr-自内射环当且仅当$(R\#G^*)*\overline{G}$是左自内射环，其中$\overline{G}\cong G$. 由[3,Theorem 2.3]知，$(R\#G^*)*\overline{G}\cong M_G(R)$. 由[2,Corollary 22.6]知，$R$与$M_G(R)$是等价的环. 由[2,Exercises 21.12]知，$M_G(R)$是左自内射环当且仅当R是左自内射环. 因此R是左 gr-自内射环当且仅当R是左自内射环.

由引理 1.1 和引理 1.2 得

定理 1.3 R是左 gr-自内射环当且仅当R是左自内射环当且仅当$R\#G^*$是左自内射环.

引理 1.4 $\{(g)R\mid g\in G\}$是R-gr 的余生成子集当且仅当$R\#G^*$是$R\#G^*$-mod 的余生成子.

证明 若$\{(g)R\mid g\in G\}$是R-gr 的余生成子集，设M是任一左$R\#G^*$-模，则$(M)_{gr}$是分次左R-模，从而存在单的分次左R-同态$(M)_{gr}\to gr(\bigoplus_{g\in G}(g)R)^A$，其中$gr(\bigoplus_{g\in G}(g)R)^A$指$R$-gr 中的直积，$A$是标集. 则存在单左$R\#G^*$-同态$M\to(gr(\bigoplus_{g\in G}(g)R)^A)^{\#}\cong((\bigoplus_{g\in G}(g)R)^{\#})^A$. 由[7,引理 2]知，$(\bigoplus_{g\in G}(g)R)^{\#}\cong R\#G^*$，则$R\#G^*$是$R\#G^*$-mod 的余生成子.

反之，若$R\#G^*$是$R\#G^*$-mod 的余生成子，M是任一分次左R-模，则存在左$R\#G^*$-单同态$(M)^{\#}\to(R\#G^*)^A$，其中A为标集，故存在分次左R-单同态$M\to((R\#G^*)^A)_{gr}\cong gr((R\#G^*)_{gr})^A$. 由[7,引理 2]知，$(R\#G)_{gr}\cong\bigoplus_{g\in G}(g)R$，则$\{(g)R\mid g\in G\}$是$R$-gr 的余生成子集.

定义 称分次环R是左 gr-PF 环，如果R是左自内射环，且$\{(g)R\mid g\in G\}$是R-gr 的余生成子集.

称分次环R是左 gr-QF 环，如果R是左 gr-Artin 的左 gr-PF 环.

引理 1.5 R是左 gr-PF 环当且仅当R是左 PF 环.

证明 由[3,Theorem 2.3]知，$(R\#G^*)*\overline{G}\cong M_G(R)$，其中$\overline{G}\cong G$. 由定理 1.3 和引理 1.4 知，$R$是左 gr-PF 环当且仅当$R\#G^*$是左 PF 环. 由[4,Proposition 4.7]知，$R\#G^*$是左 PF 环当且仅当$M_G(R)$是左 PF 环. 由[2,Corollary 22.6]知，R与$M_G(R)$等价，则R是左 PF 环当且仅当$M_G(R)$是左 PF 环. 故R是左 gr-PF 环当且仅当R是左 PF 环.

由定理 1.3，引理 1.4 和引理 1.5 即得

定理 1.6 R是左 gr-PF 环当且仅当R是左 PF 环当且仅当$R\#G^*$是左 PF 环.

引理 1.7 R是左 gr-Atin 的当且仅当$R\#G^*$是左 Artin 的.

证明 若 $R\#G^*$ 是左 Artin 的. 设 $I_1\supseteq I_2\supseteq\cdots$ 是 R 的分次左理想降链. 令 $I_i\#G^*$ 是 (g,h)-位置取 $(I_i)_{gh^{-1}}$ 的元素的 $|G|\times|G|$ 矩阵全体组成的集合, 则 $I_i\#G^*$ 是 $R\#G^*$ 的左理想且 $I_1\#G^*\supseteq I_2\#G^*\supseteq\cdots$. 因为 $R\#G^*$ 是左 Artin 的, 所以存在自然数 N 使得 $I_N\#G^*=I_{N+i}\#G^*$, $i=1,2,\cdots$, 故 $I_N=I_{N+i}$, $i=1,2,\cdots$. 从而 R 是左 gr-Atin 的.

反之, 若 R 是左 gr-Artin 的, 设 $I_1\supseteq I_2\supseteq\cdots$ 是 $R\#G^*$ 的左理想降链. 令 $(I_i)_{g,h}=\{x_{g,h}\mid x\in I_i\}$, 其中 $x_{g,h}$ 表示 x 的 (g,h)-位置的元素. 则 $(I_i)_{g,h}$ 是左 R_e-模 $R_{gh^{-1}}$ 的子模, 且对于 $g,h\in G$ 有 $(I_1)_{g,h}\supseteq(I_2)_{g,h}\supseteq\cdots$. 因为 R 是左 Artin 的, 所以由[1, Ⅱ. 3. 2 lemma]知, $R_{gh^{-1}}$ 是左 Artin 的左 R_e-模, 因而存在自然数 $N_{g,h}$ 使得 $(I_{N_{g,h}})_{g,h}=(I_{N_{g,h}+i})_{g,h}$, $i=1,2,\cdots$. 因为 G 是有限群, 所以取 $N=\max\{N_{g,h}\mid g,h\in G\}$, 则对任意 $g,h\in G$ 都有 $(I_N)_{g,h}=(I_{N+i})_{g,h}$, $i=1,2,\cdots$, 从而 $I_N=I_{N+i}$, $i=1,2,\cdots$. 因此 $R\#G^*$ 是左 Artin 的.

由引理 1.7, 定理 1.6 和[1, Ⅱ. 3. 3 Corollary]得

定理 1.8 R 是左 gr-QF 环当且仅当 R 是左 QF 环当且仅当 $R\#G^*$ 是左 QF 环.

由引理 1.7 和[1, Ⅱ. 3. 3 Coro.]得

定理 1.9 R 是左 gr-Artin 环当且仅当 R 是左 Artin 环当且仅当 $R\#G^*$ 是左 Artin 环.

同理可得

定理 1.10 R 是左 gr-Noether 环当且仅当 R 是左 Noether 环当且仅当 $R\#G^*$ 是左 Noether 环.

定理 1.11 R 是左 gr-线性紧环当且仅当 R 是左线性紧环当且仅当 $R\#G^*$ 是左线性紧环.

证明 若 R 是左 gr-线性紧环, 由[6, 5. 20 Proposition]得, 每个 R_g 都是左线性紧的左 R_e-模, $g\in G$. 因 G 是有限群, 则 R 是左线性紧的左 R_e-模. 故 R 是左线性紧环.

若 R 是左线性紧环. 由于 R 与 $(R\#G^*)*\overline{G}$ 是等价环, 则 $(R\#G^*)*\overline{G}$ 是左线性紧环. 由[4, 2. 1 Lemma]知, $R\#G^*$ 是左线性紧环.

若 $R\#G^*$ 是左线性紧环. 因为 G 是有限群, 所以由[4, 2. 1 Lemma]知, $(R\#G^*)*\overline{G}$ 是左线性紧环, 从而 R 是左线性紧环.

2 例 子

例 2.1 设 F 是一个域, 则 $F[x,x^{-1}]$ 是左分次自内射环, 但 $F[x,x^{-1}]$ 不是左自内射环. 事实上, $F[x,x^{-1}]$ 是主理想环, 而且 $F[x,x^{-1}]$ 作为左 $F[x,x^{-1}]$-模不是可除的, 由[2, Exercises 18. 2(3)]知, $F[x,x^{-1}]$ 不是左自内射环.

例 2.2 设 $N=\{0,1,2,\cdots\}$, R 是一个左线性紧环, 令

$$R^{(N)}=\{f:N\to R\mid \text{对几乎所有 } x\in N \text{ 都有 } f(x)=0\}.$$

定义: $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$, $(fg)(x)=\sum\limits_{y+z=x}f(y)g(z)$, $x\in N$. 则 $R^{(N)}$ 关于所定义的加法和乘法构成一个环. 设 Z 表示整数加群, 对任一 $n\in N$, 若 $n\geqslant 0$, 令 $R_n^{(N)}=R$; 若 $n<0$, 令 $R_n^{(N)}=0$. 则 $R^{(N)}$ 是左 gr-线性紧的 Z-型分次环. 但 $R^{(N)}$ 不是左线性紧环. 事实上, 令 $M_i=\{f\in R^{(N)}\mid f(j)=0, j=0,1,\cdots,i\}$, 则 M_i 是 $R^{(N)}$ 的左理想且 $M_0\supseteq M_1\supseteq M_2\supseteq\cdots$. 令 $x_i\in R^{(N)}$ 使得当 $j=0,1,\cdots,i$ 时 $x_i(j)=1$, 当 $j>i$ 时 $x_i(j)=0$. 则 $(M_i,X_i)_{i\in N}$ 是有限可解族, 但不是可解族.

例2.3 设F是一个域，M是F上的有限维向量空间，$T(M)$是M上的张量代数，$S(M)$是M上的对称代数，$\Lambda(M)$是M上的外代数[5]. 对于$n\in Z$，若$n\geqslant 0$，令$T(M)_n=T_{(n)}(M)$，$S(M)_n=S_{(n)}(M)$，$\Lambda(M)_n=\Lambda_{(n)}(M)$；若$n<0$，令$T(M)_n=0$，$S(M)_n=0$，$\Lambda(M)_n=0$. 则$T(M)$，$S(M)$，$\lambda(M)$都是$Z$-型分次代数. 对于任意$n\in Z$，$T_{(n)}(M)$，$S_{(n)}(M)$，$\Lambda_{(n)}(M)$都是有限维向量空间，则$T_{(n)}(M)$，$S_{(n)}(M)$，$\Lambda_{(n)}(M)$都是Artin F-模，从而$T_{(n)}(M)$，$S_{(n)}(M)$，$\Lambda_{(n)}(M)$都是线性紧的F-模. 因此$T(M)$，$S(M)$，$\Lambda(M)$都是左gr-线性紧环. 但$T(M)$和$S(M)$都不是左线性紧环. 而$\Lambda(M)$是有限维的左F-模，因而$\Lambda(M)$是线性紧环.

例2.4 设F是一个域，L是F-李代数且是F上的有限维向量空间，$U(L)$是L的泛包络代数，$\mathrm{gr}U(L)\cong S(L)$，从而$\mathrm{gr}U(L)$是左gr-线性紧的，但不是线性紧的.

参考文献：

[1] NĂSTĂSESCU C and OYSTAEYEN F V. *Graded ring theory* [M]. Mathematical Library, Nort-Holland Amsterdam, 1980.

[2] ANDERSON F W and FULLER K R. *Rings and categories* [M]. Springer-Verlag New York, Heidelberg, Berlin, 1974.

[3] LIU Shao-xue and OYSTAEYEN F V. *Group graded rings, Smash products and additive categories, Perspectives in Ring Teory* [M]. Kluwer, Academic Publishers, 1988, 299—310.

[4] MENINI C. *Finitely graded ring, Morita duality and selfinjectivity* [J]. Comm. in Algebra, 1987, **15**: 1779—1797.

[5] EIICHI Abe. *Hapf Algebras* [M]. Cambridge Univesity Press, Cambridge London New York, New Rochelle Melbourne Sydney, 1980.

[6] MENINI C and RIO A D. *Morita duality and graded rings* [J]. Comm. in Algebra, 1991, **19**(6): 1765—1794.

[7] 张圣贵. 分次Morita对偶,Morita对偶和Smash积 [J]. 数学学报, 1994, **37**(6): 756—761.

[8] 张圣贵. 自内射性和Smash积 [J]. 福建师大学报(自), 1992, **8**(1): 32—35.

On Graded Properties and Non Graded Properties over Graded Rings

ZHANG Sheng-gui

(Dept. of Math., Fujian Normal University, Fuzhou 350007)

Abstract: In this paper, we prove that a finite-group graded ring R is left gr-selfinjective, left gr-PF, left gr-QF and left gr-linearly compact if and only if R is left selfinjective, left PF, left QF and left linearly compact if and only if its smash product $R\#G$ is left selfinjective, left PF, left QF and left linearly compact, repectively.

Key words: gr-PF; gr-QF; gr-linearly compact.