第19卷第4期 数学研究与评论 Vol. 19 No. 4
1999年11月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Nov. 1999

关于既约非负矩阵优势比的界*

周 伟 光
(南京教育学院数学系，南京 210017)

摘　要：本文改进了 A. M. Ostrowski[1]和佟文廷[3]的结果，得到了关于既约非负矩阵优势比的新界.

关键词：矩阵的优势比，既约非负矩阵.
分类号：AMS(1991) 15A48/CLC O151.21
文献标识码：A　　**文章编号**：1000-341X(1999)04-0738-03

1 引 言

设 $A=(a_{ij})_{n\times n}\in C^{n\times n}$ 为一个 n 阶复矩阵，记 $\sigma(A)=\{\lambda_1,\lambda_2\cdots\cdots\lambda_n\}$ 为矩阵 A 的谱，且记

$$|\lambda_1|=\max_{1\leqslant j\leqslant n}|\lambda_j|,\quad |\lambda_2|=\max_{\substack{1\leqslant j\leqslant n\\ |\lambda_j|<|\lambda_1|}}|\lambda_j|.$$

称比值 $d=\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|$ 为矩阵 A 的优势比，这是矩阵谱论中的重要概念之一，非负矩阵优势比的重要性是众所周知的.

1964 年 A. M. Ostrowski[1]用 Hopf 在泛函分析中的一个结果证明了：

当 $A>0$ 时，

$$d\leqslant (M-m)/(M+m), \tag{1}$$

其中 $M=\max\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n}a_{ij}$，$m=\min\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n}a_{ij}$.

1978 年，周伯埙[3]证明了这是一个可以达到的界，并给出了达到此界的充分必要条件.

1974 年 A. M. Ostrowski[2]又给出了一个既约非负矩 A 的优势比的界：

$$d\leqslant\left[\frac{1-n\left(\frac{g}{nG}\right)^w}{1+n\left(\frac{g}{nG}\right)^w}\right]^{\frac{1}{w}}<\frac{1-\frac{n}{w}\left(\frac{g}{nG}\right)^w}{1+\frac{n}{w}\left(\frac{g}{nG}\right)^w}, \tag{2}$$

其中 $G=\max\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n}a_{ij}$，$g=\min\limits_{\substack{1\leqslant i,j\leqslant n\\ a_{ij}>0}}a_{ij}$，$w=(n-1)^2+1$.

1976 年，佟文廷[4]改进了(2)中的结果，进一步得到一个更好的且可达到的界：

* 收稿日期：1996-09-18
作者简介：周伟光(1958-)，男，江苏人，南京教育学院讲师.

$$d \leqslant \left(\frac{1-\frac{g^w}{R^{w-1}G}}{1+\frac{g^w}{R^{w-1}G}}\right)^{\frac{1}{w}} < \frac{1-\frac{g^w}{wR^{w-1}G}}{1+\frac{g^w}{wR^{w-1}G}}, \tag{3}$$

其中 $R=\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\sum\limits_{j=1}^{n}a_{kj}$ 为矩阵 A 的最大行和.

本文的目的是改进(1),(3)的结果.

2 结果与证明

定理 1 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}\geqslant 0$ 为既约矩阵,则有

$$d \leqslant S/T, \tag{4}$$

这里 $T=\max\{\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}, \min\limits_{1\leqslant j\leqslant n}\sum\limits_{i=1}^{n}a_{ij}, \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}a_{ii}\}$, $S=\min\{\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}-\sum\limits_{j=1}^{n}\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}a_{ij}, \max\limits_{1\leqslant j\leqslant n}\sum\limits_{i=1}^{n}a_{ij}-\sum\limits_{i=1}^{n}\min\limits_{1\leqslant j\leqslant n}a_{ij}\}$.

证明 由著名的 Perron-Frobenius 定理得 $r\leqslant\lambda_1\leqslant R$, $c\leqslant\lambda_1\leqslant C$,其中 $r=\min\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\sum\limits_{j=1}^{n}a_{kj}$, $c=\min\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\sum\limits_{j=1}^{n}a_{jk}$, $C=\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\sum\limits_{j=1}^{n}a_{jk}$. 又因为 $\lambda_1\geqslant\max\limits_{1\leqslant j\leqslant n}a_{jj}$(见 A. Brauer 定理),故有 $\lambda_1\geqslant T$.

再由 E. Scheffold 定理[5]知有 $|\lambda_2|\leqslant min\{R-\sum\limits_{j=1}^{n}\varphi_j, C-\sum\limits_{j=1}^{n}\psi_j\}=S$, 其中 $\varphi_j=\min\limits_{1\leqslant k\leqslant n}a_{kj}$, $\psi_j=\min\limits_{1\leqslant k\leqslant n}a_{jk}$.

综上即得本定理.

注意到正矩阵当然必为既约非负矩阵,将此定理用于正矩阵,则得如下结果.

定理 2 设 A 为正矩阵,则

$$d \leqslant \min\left(\frac{S}{T}, \frac{M-m}{M+m}\right). \tag{5}$$

注 1 对正矩阵优势比 d 的上界, S/T 有时优于 $(M-m)/(M+m)$,有时又不如 $(M-m)/(M+m)$. 因此,定理 2 的结果确实地优于(1),也优于定理 1. 看下面的例子即知.

例 1 取 $A=\begin{pmatrix}1+\varepsilon & 2 & 3\\ 1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$ $(0<\varepsilon<2)$,则 $S/T=\frac{\varepsilon}{6}<\frac{M-m}{M+m}=\frac{3-1}{3+1}=\frac{1}{2}$.

若取 $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 3\\ 3 & 3 & 1\end{pmatrix}$,则 $S/T=2/3>\frac{M-m}{M+m}=\frac{1}{2}$.

类似地,将定理 1 用于既约非负矩阵,又得

定理 3 设 A 是一个既约非负矩阵,则

$$d \leqslant \min\left\{\frac{S}{T}, \left(\frac{1-\frac{g^w}{R^{w-1}G}}{1+\frac{g^w}{R^{w-1}G}}\right)^{\frac{1}{w}}\right\}.$$

注 2 对既约非负矩阵的优势比 d 的上界 S/T，有时优于 $\left(\frac{1-\frac{g^w}{R^{w-1}G}}{1+\frac{g^w}{R^{w-1}G}}\right)^{\frac{1}{w}}$，有时又不如后者，因此定理 3 确实优于(2)，(3)，及定理 1.

试看下例

例 2 取既约非负矩阵 $A=\begin{pmatrix}0 & 5 & 5\\ 1 & 5 & 5\\ 1 & 5 & 5\end{pmatrix}$，则此时 $\frac{S}{T}=\frac{1}{10}<\left(\frac{1-\frac{g^w}{R^{w-1}G}}{1+\frac{g^w}{R^{w-1}G}}\right)^{\frac{1}{w}}=\left(\frac{11^4\cdot 5-1}{11^4\cdot 5+1}\right)^{\frac{1}{5}}$.

若于既约非负矩阵 $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 2 & 3\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 2 & 0 & 0 & 0\\ 3 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，则此时 $\frac{S}{T}=6>\left(\frac{1-\frac{g^w}{R^{w-1}G}}{1+\frac{g^w}{R^{w-1}G}}\right)^{\frac{1}{w}}$ (<1)

参考文献：

[1] OSTROWSKI A M. *Prositive matrices and functional analysis, in 〈Recent Advances in Matrix Theory〉* [M]. (H. Schneider, Ed), Vniv. of wisconsin Press Madison, 1964, 81—101.

[2] OSTROWSKI A M. *On subdominant roots of nonnegative matrices.* [J]. Linear Alg. Appl., 1974, **8**: 179—184.

[3] 周伯埙. 关于正矩阵的次特征值 [J]. 南京大学学报数学专刊, 1980, 108—113.

[4] 佟文廷. 关于非负矩阵优势比的界 [J]. 数学学报, 1977, **20**: 272—275.

[5] SCHEFFOLD E. Eine Abschätzung für die. *Subdminanten Eigenwerte Nichtnegative* [J]. Matrizen Linear Alg. Appl., 1978, **19**: 91—93.

On Dominance Ratio of Nonnegative Matrices

Zhou Weiguang

(Nanjing Education Institute, Nanjing 210017)

Abstract: In this paper, we improved the results of A. M. Ostrowski[1] and Toug Wenting[4] on the dominance ratio of nonnegative Matrices, obtained a new better ratio.

Key words: on dominance ratio of matrices; Irreducible nonnegative matrix.