第19卷第4期 数学研究与评论 Vol. 19 No. 4
1999年11月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Nov. 1999

非正截曲率的完备 Riemann 流形在无穷远截曲率趋于零的条件*

夏大峰[1]， 徐森林[2]， 祁 锋[2]

(1. 阜阳师范学院数学系，安徽 236032；
2. 中国科学技术大学数学系，合肥 230026)

摘 要：本文给出并证明了定理：设 M 为具非正截曲率的完备 Riemann 流形，$\gamma:[0,+\infty)\to M$ 为 M 上的正规测地线，U 是沿 γ 且初值为零的非平凡正常 Jacobi 场，若存在 $\alpha>0, t_0\geqslant 0$，使得当 $t\geqslant t_0$ 时，有 $|U(t)|\leqslant t^\alpha$，且 $\lim\limits_{t\to\infty}K(\dot{\gamma}\wedge U)(t)$ 存在，则 $\lim\limits_{t\to\infty}K(\dot{\gamma}\wedge U)(t)=0$.

关键词：正规测地线；Jaboci 场；截曲率.
分类号：AMS(1991) 53A,53C/CLC O186.12
文献标识码：A **文章编号**：1000-341X(1999)04-0747-06

1 引言与主要定理

设 M 为完备开流形，$\dim M\geqslant 3$，$p\in M$，若指数映射 $\exp_p:T_pM\to M$ 是微分同胚，则称 p 为 M 的极点. $q\in M$，$\mathrm{dist}(p,q)$ 表示 p,q 之间的距离，于是定义距离函数 $\rho:M\to \boldsymbol{R}$ 为：对任意的 $q\in M$，$\rho(q)=\mathrm{dist}(p,q)$. 再定义 $K:[0,+\infty)\to\boldsymbol{R}$ 为：对任意 $t\in[0,+\infty)$

$$K(t)=\sup\{|q \text{ 处的截曲率}|:\rho(q)=t, q\in M\}.$$

在文[1]中，Mok，Siu 及 Yau 证明了：若 M 为 Kähler 流形，p 为极点，$K(t)\leqslant A_\delta/(1+t^{2+\delta})$，(其中 $\delta>0$，A_δ 是与 δ 有关的常数)，则 M 是双全纯同胚于 $C^n(n=\dim_c M)$.

在文[2]中，Greene 和 Wu 对 Riemann 流形证明了类似的结果，其中定理 2,3 和 5 的条件中假设了 $\liminf_{t\to\infty}t^2K(t)=0$，定理 4 的条件中假设了 $\int_0^{+\infty}tK(t)$ 是有限的.

在文[3]中所给的定理条件中也有类似的假设条件.

综合文[1]，[2]，[3]，不难看出它们都有一个共同的特点，即 $\lim\limits_{t\to\infty}K(t)=0$，这就提出了一个非常自然的问题，在什么条件下能得到 $\lim\limits_{t\to\infty}K(t)=0$ 呢？再退一步说，设 $\gamma:[0,+\infty)\to M$ 是 M 上的正规测地线，U 为沿 γ 的非平凡正常 Jacobi 场，在什么条件下有 $\lim\limits_{t\to\infty}K(\dot{\gamma}\wedge U)(t)=0$，其中 $K(\dot{\gamma}\wedge U)(t)$ 表示 $\gamma(t)$ 处平面 $\dot{\gamma}\wedge U\subset T_{\gamma(t)}M$ 的截曲率. 在本文，就非正截曲率的情况下，通过

* 收稿日期：1997-06-09
作者简介：夏大峰(1958-)，男，安徽颍上县人，阜阳师范学院副教授.

构造函数列的方法证明了下面的主要结果：

定理 1 设 M 为具非正截曲率的完备 Riemann 流形，$r:[0,+\infty)\to M$ 为 M 上的正规测地线，U 为沿 r 且初值为零的非平凡正常 Jacobi 场. 若存在 $a>0, t_0\geqslant 0$，使得当 $t\geqslant t_0$ 时，有 $|U(t)|\leqslant t^a$，且 $\lim\limits_{t\to\infty}K(\dot r\wedge U)(t)$ 存在，则

$$\lim_{t\to\infty}K(\dot r\wedge U)(t)=0.$$

最后，还给出了定理 1 的应用.

设 M 为 Riemann 流形，$\langle,\rangle$表示 M 上的 Riemann 度量. r 为 M 中的一条测地线，称沿 r 的 C^∞向量场 U 为 Jacobi 场，如果 $\ddot U+R_{\dot r U}\dot r=0$，其中 $\dot r$ 表示 r 的切矢量，$\dot U\overset{\triangle}{=}\mathrm{D}_{\dot r}U$，$\ddot U\overset{\triangle}{=}\mathrm{D}_{\dot r}\mathrm{D}_{\dot r}U$，D 表示 M 上的 Levi-Civita 联络.

2 定理 1 的证明

为了证明主要定理 1，先集中精力来完成下面引理的证明.

引理 1 设 M 是完备 Riemann 流形，$r:[0,+\infty)\to M$ 为 M 上的正规测地线，U 为沿 r 且初值为零的非平凡正常 Jacobi 场，若

$$\langle \dot U,\dot U\rangle\geqslant\langle R_{\dot r U}\dot r,U\rangle,$$

则有下列结论：

(1) U 的模$|U(t)|$是递增的；

(2) U 的模$|U(t)|$是无界的.

证明 (1) 令$f(t)=\langle U,U\rangle(t)=|U(t)|^2$，

$$\dot f(t)=2\langle\dot U,U\rangle(t),$$

$$\ddot f(t)=2(\langle\dot U,\dot U\rangle(t)+\langle\ddot U,U\rangle(t))=2(\langle\dot U,\dot U\rangle(t)-\langle R_{\dot r U}\dot r,U\rangle(t)),$$

所以，由 $\ddot f(t)\geqslant 0$ 知 $\dot f(t)$是递增的，又因为 $\dot f(0)=0$，所以 $\dot f(t)\geqslant\dot f(0)=0$，故 $f(t)$是递增的，即$|U(t)|$是递增的.

(2) 用反证法. 假设$|U(t)|$是有界的，那么，$f(t)=\langle U,U\rangle(t)$也是有界的.

考虑下列函数列$\{f_n\}$

$$f_n(t)=\frac{f(t)+1}{(t+1)^{\frac{1}{n}}},\ t\in[0,+\infty),$$

其中 $n\in N$，显然 $f_n(t)$具有下列性质：

(i) 对任意的 $n\in N$，$f_n(0)=1$；

(ii) 对任意固定的 $t\in[0,+\infty)$，$\lim\limits_{n\to\infty}f_n(t)=f(t)+1$；

(iii) 对任意固定的 $n\in N$，$\lim\limits_{t\to\infty}f_n(t)=0$.

因为 U 是非平凡的，故存在 $t_0>0$，使 $f(t_0)>0$. 固定这个 $t_0>0$，由性质(i)，(ii)知：存在充分大的 $n_0\in N$(不妨设 $n_0>2$)，使得：

$$f_{n_0}(t_0)>f_{n_0}(0)=1.$$

固定 $n_0\in N$. 由性质(iii)知：存在 $t^*\in[0,+\infty)$，使得 $f_{n_0}(t^*)$是 $f_{n_0}(t)$的最大值. 于是由 f_{n_0}

$(t^*)\geqslant f_{n_0}(t_0)>1$ 得：$f(t^*)>0$. 故由(1)知 $t^*>0$. 根据极大值原理知：在 t^* 处有

$$\dot f_{n_0}(t^*)=0,\ddot f_{n_0}(t^*)\leqslant 0.$$

因为

$$\dot f_{n_0}(t)=\frac{2\langle \dot U,U\rangle(t)}{(t+1)^{\frac{1}{n_0}}}-\frac{1}{n_0(t+1)}\frac{f(t)+1}{(t+1)^{\frac{1}{n_0}}},\tag{a}$$

所以，在 t^* 处，由 $\dot f_{n_0}(t^*)=0$ 得

$$\langle \dot U,U\rangle(t^*)=\frac{1}{2n_0(t^*+1)}(f(t^*)+1).\tag{b}$$

再由(a)式得：

$$\ddot f_{n_0}(t)=\frac{2(\langle \dot U,\dot U\rangle(t)+\langle \ddot U,U\rangle)}{(t+1)^{\frac{1}{n_0}}}-\frac{4}{n_0(t+1)}\cdot\frac{\langle \dot U,U\rangle(t)}{(t+1)^{\frac{1}{n_0}}}+$$

$$[\frac{1}{n_0(t+1)^2}+\frac{1}{n_0^2(t+1)^2}]\frac{f(t)+1}{(t+1)^{\frac{1}{n_0}}},$$

所以，在 t^* 处由 $\ddot f_{n_0}(t^*)\leqslant 0$ 得：

$$\langle \dot U,\dot U\rangle(t^*)+\langle \ddot U,U\rangle(t^*)\leqslant\frac{2}{n_0(t^*+1)}\langle \dot U,U\rangle(t^*)-\frac{1}{2}(\frac{1}{n_0}+\frac{1}{n_0^2})\frac{f(t^*)+1}{(t^*+1)^2}.\tag{c}$$

把(b)代入不等式(c)的右边得：

$$\langle \dot U,\dot U\rangle(t^*)-\langle R_{\dot r U}\,\dot r,U\rangle(t^*)\leqslant\frac{1}{2}(\frac{1}{n_0^2}-\frac{1}{n_0})\frac{f(t^*)+1}{(t^*+1)^2}<0$$

(注：$n_0>2$)，与 $\langle \dot U,\dot U\rangle(t^*)-\langle R_{\dot r U}\,\dot r,U\rangle\geqslant 0$ 相矛盾. 所以，$f(t)$ 是无界的，故 $|U(t)|$ 是无界的.

特别地，有：

引理 2 设 M 为具非正截曲率的完备 Riemann 流形，$r:[0,+\infty)\to M$ 为 M 上的正规测地线，则对任意沿 r 且初值为零的非平凡正常 Jacobi 场 U，其模 $|U(t)|$ 都是递增无界的.

证明 因为 $\langle \dot U,\dot U\rangle-\langle R_{\dot r U}\,\dot r,U\rangle\geqslant 0$(注：这里 $\langle R_{\dot r U}\,\dot r,U\rangle=K(\dot r\wedge U)\cdot|U|^2\leqslant 0$)，所以，由引理 1 即得.

引理 3 设 M 为具非正截曲率的完备 Riemann 流形，$r:[0,+\infty)\to M$ 为 M 上的正规测地线，U 是沿 r 且初值为零的非平凡正常 Jacobi 场，若存在 $a>0,t_0\geqslant 0$，使得当 $t\geqslant t_0$ 时，都有 $|U(t)|\leqslant t^a$，则存在一数列 $\{t_n\}$ 具有下列性质：

(i) $\lim\limits_{n\to\infty}t_n=+\infty$;

(ii) $\sup\{|U(t_n)|^2:n\in N\}=\lim\limits_{n\to\infty}|U(t_n)|^2=+\infty$;

(iii) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\langle \dot U,U\rangle(t_n)}{\langle U,U\rangle(t_n)}=0$;

(iv) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\langle \dot U,\dot U\rangle(t_n)}{\langle U,U\rangle(t_n)}=0$;

(v) $\lim\limits_{n\to\infty}K(\dot r\wedge U)(t_n)=0$.

引理 3 是下列引理 4 的特例，即

引理 4 设 M 为完备 Riemann 流形，$r:[0,+\infty)\to M$ 为 M 上的正规测地线，U 为沿 r 且

初值为零的非平凡正常 Jacobi 场，如果$\langle \dot U ,\dot U \rangle \geqslant \langle R_{\dot r U}\ \dot r ,U \rangle$且$|U(t)|\leqslant t^B (t\geqslant t'_0\geqslant 0)$，则存在一数列$\{t_n\}$，使得

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} t_n=\infty$；

(2) $\sup\{|U(t_n)|^2 : n\in N\}=\lim\limits_{n\to\infty}|U(t_n)|^2=+\infty$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\langle \dot U ,U \rangle (t_n)}{\langle U ,U \rangle (t_n)}=0$；

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{\langle \dot U ,\dot U \rangle (t_n)}{\langle U ,U \rangle (t_n)}-K(\dot r\wedge U)(t_n))=0$.

其中$B>0$为常数，$K(\dot r\wedge U)(t)$为平面$\dot r\wedge U\subset T_{r(t)}M$的截曲率.

证明 令$f(x)=\langle U ,U \rangle (t)=|U(t)|^2$，由引理 1 知$f(t)$是无界的.

考虑下面的函数列$\{f_n(t)\}$

$$f_n(t)=\frac{f(t)+1}{e^{\frac{1}{n}t}},t\in[0,+\infty)$$

因为$f(t)\leqslant t^{2B}$，所以，对每一固定的$n\in N$，由：$0\leqslant\lim\limits_{t\to\infty}f_n(t)=\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{f(t)+1}{e^{\frac{1}{n}t}}\leqslant\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{t^{2B}+1}{e^{\frac{1}{n}t}}=0$ 得$\lim\limits_{t\to\infty}f_n(t)=0<1=f_n(0)$，所以，对每一$n\in N$，存在$t_n\in[0,+\infty)$，使得$t_n$是$f_n(t)$的最大值点.

(1) 用反证法，假设$\lim\limits_{t\to\infty}t_n\neq\infty$，则必存在$\{t_n\}$的子序列收敛于某个$t_0\in[0,+\infty)$. 为方便而又不失一般性，不妨假设$\{t_n\}$收敛于$t_0$. 因为$f(t)$是无界的，所以，存在$t^*>0$，使得对每一$t_n$，都有$f(t_n)+1<f(t^*)$，$f(t_0)+1<f(t^*)$，又因为

$$\lim_{n\to\infty}f_n(t_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{f(t_n)+1}{e^{\frac{1}{n}t_n}}=f(t_0)+1,\quad \lim_{n\to\infty}f_n(t^*)=\lim_{n\to\infty}\frac{f(t^*)+1}{e^{\frac{1}{n}t^*}}=f(t^*)+1,$$

所以，由$f(t_0)+1<f(t^*)<f(t^*)+1$ 知：$\lim\limits_{n\to\infty}f_n(t_n)<\lim\limits_{n\to\infty}f_n(t^*)$，故存在充分大的$n\in N$，使得$f_n(t_n)<f_n(t^*)$. 这与$f_n(t_n)$是$f_n(t)$的最大值相矛盾，故$\lim\limits_{n\to\infty}t_n=\infty$.

(2)由(1)以及引理 1 是显然的.

(3)，(4)：由(1)知存在$N\in N$，当$n>N$时，$t_n>0$，下面，只对N以后的项进行讨论. 由t_n的取法知$\dot f_n(t_n)=0$，$\ddot f_n(t_n)\leqslant 0$，$n\in N$，$n>N$，因为

$$\dot f_n(t)=\frac{2\langle \dot U ,U \rangle (t)}{e^{\frac{1}{n}t}}-\frac{1}{n}\frac{f(t)+1}{e^{\frac{1}{n}t}} \tag{Δ}$$

所以，在t_n处由$\dot f_n(t_n)=0$得：

$$\langle \dot U ,U \rangle (t_n)=\frac{1}{2n}(f(t_n)+1) \tag{*}$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\langle \dot U ,U \rangle (t_n)}{\langle U ,U \rangle (t_n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n}(1+\frac{1}{f(t_n)})=0.$$

即(3)成立. 再由(Δ)式得：

$$\ddot f_n(t)=\frac{2(\langle \dot U ,\dot U \rangle (t)+\langle \ddot U ,U \rangle (t))}{e^{\frac{1}{n}t}}-\frac{4}{n}\frac{\langle \dot U ,U \rangle (t)}{e^{\frac{1}{n}t}}+\frac{1}{n^2}\cdot\frac{f(t)+1}{e^{\frac{1}{n}t}},$$

所以，在t_n处由$\ddot f_n(t_n)\leqslant 0$得：

$$\langle \dot U,\dot U\rangle(t_n)+\langle \ddot U,U\rangle(t_n)\leqslant\frac{2}{n}\langle \dot U,U\rangle(t_n)-\frac{1}{2n^2}(f(t_n)+1).$$

因为$\langle \ddot U,U\rangle=-\langle R_{\dot rU}\dot r,U\rangle=-K(\dot r\wedge U)\cdot|U|^2$,并把(*)式代入上述不等式右边得:

$$0\leqslant\frac{\langle \dot U,\dot U\rangle(t_n)}{\langle U,U\rangle(t_n)}-K(\dot r\wedge U)(t_n)\leqslant\frac{1}{2n^2}(1+\frac{1}{f(t_n)}),$$

所以,

$$\lim_{n\to\infty}(\frac{\langle \dot U,\dot U\rangle(t_n)}{\langle U,U\rangle(t_n)}-K(\dot r\wedge U)(t_n))=0$$

引理 3 的证明 因为$\langle \dot U,\dot U\rangle-\langle R_{\dot rU}\dot r,U\rangle\geqslant0$(注$\langle R_{\dot rU}\dot r,U\rangle=K(\dot r\wedge U)\cdot|U|^2\leqslant0$),故由引理 4 知:(i),(ii),(iii)成立,至于(iv)和(v)由引理 4 的(4)即得.

主要定理 1 的证明 因为$\lim\limits_{t\to\infty}K(\dot r\wedge U)(t)$存在,所以由引理 3 即得:$\lim\limits_{t\to\infty}K(\dot r\wedge U(t)=0$.

注 1 引理 4 给出了利用 Jacobi 场在无穷远处求截曲率的计算公式:

推论 1 在引理 4 的假设条件下,若极限$\lim\limits_{t\to\infty}\frac{\langle \dot U,\dot U\rangle(t)}{\langle U,U\rangle(t)}$,$\lim\limits_{t\to\infty}K(\dot r\wedge U)(t)$存在,则

$$\lim_{t\to\infty}K(\dot r\wedge U)(t)=\lim_{t\to\infty}\frac{\langle \dot U,\dot U\rangle(t)}{\langle U,U\rangle(t)}.$$

3 应用与其它

根据引理 2 有:

定理 2 设 M 是具非正截曲率的完备 Riemann 流形,那么,对任意的正规测地线 $r:[0,+\infty)\to M$ 都没有共轭点.

定理 2 实际上就是[4]中 91 页的 Cartan-Hadam ard 定理(1).同样引理 1 给出了更一般地结果:

定理 3 在引理 1 的条件下,U 沿 r 没有 $U(0)=0$ 的共轭点,即对任意的 $t>0,U(t)\neq0$.

注 2 定理 1 中的 $a\geqslant1$.

注 2 的证明 选取沿 r 平行的单位正交标架场$\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$,使得 $e_n=\dot r$,由 $U\perp\dot r$,可令

$$U(t)=\sum_{i=1}^{n-1}h_i(t)e_i,$$

由于$\dot U(0)=\sum\limits_{i=1}^{n-1}\dot h_i(0)e_i$,所以$\dot U(0)\perp\dot r(0)$,所以由[4]中 140 页的 Rauch′比较定理和 151 页(8.6)式中的第 1 式知:$|U(t)|\geqslant ct,t\in[0,+\infty)$,($c$ 为常数),故 $a\geqslant1$.

推论 2 设 M 为具非正截曲率的完备 Riemann 流形,$r:[0,+\infty)\to M$ 是 M 上的正规测地线,且存在 $t_0\geqslant0$,对任意的 $t\geqslant t_0$,都有

$$\inf\{K(P):P\text{ 为 }T_{r(t)}M\text{ 的平面}\}=\sup\{K(P):P\text{ 为 }T_{r(t)}M\text{的平面}\}\overset{\triangle}{=}K(t).$$

而且$\lim\limits_{t\to\infty}K(t)$存在.若存在沿 r 且初值为零的非平凡正常 Jacobi 场 U 及 $a>0,t'_0\geqslant0$,当 $t\geqslant t'_0$ 时,都有$|U(t)|\leqslant t^a$,则

$$\lim_{t\to\infty}K(t)=0$$

证明 由定理 1 即得.

推论 3 设 M 是具非正的常截曲率 C 的 Riemann 流形，则 $C=0$ 当且仅当存在 M 上的一条正规测地线 $r:[0,+\infty)\to M$，以及沿 r 的非平凡正常 Jacobi 场 U，$U(0)=0$，使得存在 $a>0,t_0>0$，当 $t\geqslant t_0$ 时，$|U(t)|\leqslant t^a$.

证明 必要性 由[4]中 151 页的(8.6)式中第 1 式是显然的.

充分性 由定理 1 知：存在数列$\{t_n\}$，使得 $\lim\limits_{n\to\infty}t_n=+\infty$，$\lim\limits_{n\to\infty}K(\dot{r}\wedge U)(t_n)=0$，而 $K(\dot{r}\wedge U)(t)=C$ 为常数，所以 $C=0$.

推论 4 设 M 是具非正截曲率的 2 维完备 Riemann 流形，$r:[0,+\infty)\to M$ 为 M 上的正规测地线，U 为沿 r 的非平凡正常 Jacobi 场，$U(0)=0$. 若存在 $a>0,t_0\geqslant 0$，使得当 $t\geqslant t_0$ 时，$|U(t)|\leqslant t^a$，并且$\lim\limits_{t\to\infty}K(t)$存在，则

$$\lim_{t\to\infty}K(t)=0,$$

其中 $K(t)$为 $r(t)$处的截曲率.

证明 推论 4 是推论 2 的特例.

参考文献：

[1] MOK N, SIU Y T, YAU S T. *The Poincaré-Lelong equation on complete kaehler manifold* [J]. Compositio Math., 1981, **44**: 183—218.

[2] GREENE R E and WU H. *Gap theorems for noncompact Riemannian manifolds* [J]. Duke Math. J., 1982, **49**(3): 731—756.

[3] GREENE R E and WU H. *On a new gap phenomenon in Riemannian geometry* [J]. Proc. Nat. Acad. Sci., 1982, **79**: 714—715.

[4] 伍鸿熙，沈纯理，虞言林. 黎曼几何初步 [M]. 北京：北京大学出版社，1989.

Condition of Sectional Curvature Tend to Zero at to Infinity about Complete Riemannian Manifold with Non-Positive Curvature

XIA Da-feng[1], XU Sen-lin[2], QI Feng[2]

(1. Dept. of Math., Fuyang Normal College, Anhui 236032;

2. Dept. of Math. Univ of Sci. & Tech. of China, Hefei 230026)

Abstract: In this paper, we give and prove the following theorem: If M is a complete Riemannian manifold with non-positive curvature, $r:[0,+\infty)\to M$ be a normal geodesic on M, U be a non-trivial normal Jacobi field along r and $U(0)=0$, and if there is a $a>0, t_0>0$ so that $|U(t)|\leqslant t^a$ with $t\geqslant t_0$, and $\lim\limits_{t\to\infty}K(\dot{r}\wedge U)(t)=0$ existence, then $\lim\limits_{t\to\infty}K(\dot{r}\wedge U)(t)=0$.

Key words: normal geodesic; Jacobi field; sectional curvature.