第19卷第4期 数学研究与评论 Vol. 19 No. 4
1999年11月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Nov. 1999

推广的Kantorovich多项式算子在$L_{p[0,1]}(1\leqslant p)$中的一个整体逆定理*

陈广荣[1]， 刘吉善[2]
(1. 河北科技大学基础部，石家庄 050054； 2. 大连水产学院基础部，116024)

摘　要：本文对推广的Kantorovich多项式算子，在满足一定条件下，得出了算子逼近过程中的一个整体逆定理，从而推广了文献[1]中Z. Ditzian的结果.

关键词：算子；逆定理.
分类号：AMS(1991) 41A10/CLC O174.41
文献标识码：A　　**文章编号**：1000-341X(1999)04-0781-05

1 引　理

Bernstein-Kantorovich多项式算子定义为

$$B_n^*(f,x)=\sum_{i=0}^{n}(n+1)\int_{I_{n,i}}f(t)\mathrm{d}t\cdot p_{n,i}(x),\tag{1.1}$$

其中 $p_{n,i}(x)=\binom{n}{i}x^i(1-x)^{n-i}$，$I_{n,i}=[\frac{i}{n+1},\frac{i+1}{n+1}]$，　$(i=0,1,\cdots,n)$.

定义　设 $\alpha_n\geqslant 0$，$k\in N$，对于任意 $f\in L_{p[a,b]}$，称

$$M_n^{(k)}(\alpha_n,f,x)=(n+k+\alpha_n)^k\sum_{i=0}^{n}\int_0^{\frac{1}{n+k+\alpha_n}}\cdots\int f(\frac{i}{n+k+\alpha_n}+y_1+y_2\cdots+y_k)\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2\cdots\mathrm{d}y_k p_{n,i}(x)\tag{1.2}$$

为推广的Kantorovich多项式算子. 其中 $p_{n,i}(x)=\binom{n}{i}x^i(1-x)^{n-i}(i=0,1,2,\cdots,n)$.

特别当 $\alpha_n=0$，$k=1$ 时 $M_n^{(k)}(0,f,x)$ 即为函数 f 的Bernstein-Kantorovich多项式算子. 设

$$B_p=\{g;\ g(x),g'(x),\ x(1-x)g''(x)\in L_{p[0,1]}\},\qquad 1\leqslant p<\infty.\tag{1.3}$$

为了证明整体逆定理，首先证明一个重要的引理.

引理　设 $f\in L_{p[0,1]}$，则

(1)　$\|M_n^{(k)'}(\alpha_n,f,x)\|_{L_{p[0,1]}}=O(n\|f\|_{L_{p[0,1]}})$；

(2)　$\|x(1-x)M_n^{(k)''}(\alpha_n,f,x)\|_{L_{p[0,1]}}=O(n\|f\|_{L_{p[0,1]}})$；

* 收稿日期：1996-11-01
作者简介：陈广荣(1933-)，男，蒙古族，辽宁建平县人，河北科技大学教授.

又若 $f\in B_p$，则

(3) $\|M_n^{(k)\prime}(\alpha_n,f,x)\|_{L_p[0,1]}=O(n\|f'\|_{L_p[0,1]})$；

(4) $\|x(1-x)M_n^{(k)\prime\prime}(\alpha_n,f,x)\|_{L_p[0,1]}=O(\|f'\|_{L_p[0,1]}+\|x(1-x)f''(x)\|_{L_p[0,1]})$.

证明 首先证明(1). 因为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}M_n^{(k)}(\alpha_n,f,x)=(n+k+\alpha_n)^k\sum_{i=0}^{n}\int_0^{\frac{1}{n+k+\alpha_n}}\cdots\int f(\frac{i}{n+k+\alpha_n}+y_1+y_2\cdots+y_k)\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2\cdots\mathrm{d}y_k\cdot n(p_{n-1,i-1}(x)-p_{n-1,i}(x)),$$

所以

$$\|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}M_n^{(k)}(\alpha_n,f,x)\|_{L_\infty[0,1]}=O(n\|f\|_{L_\infty[0,1]})$$

$$\|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}M_n^{(k)}(\alpha_n,f,x)\|_{L_1[0,1]}\leqslant(n+k+\alpha_n)^k\sum_{i=0}^{n}\int_0^{\frac{1}{n+k+\alpha_n}}\cdots\int f(\frac{i}{n+k+\alpha_n}+y_1+y_2\cdots+y_k)\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2\cdots\mathrm{d}y_k\cdot n(\frac{1}{n}+\frac{1}{n})=O(n\|f\|_{L_1[0,1]}).$$

利用 Riesz-Thorin 定理得到 $\|M_n^{(k)\prime}(\alpha_n,f,x)\|_{L_p[0,1]}=O(n\|f\|_{L_p[0,1]})$.

其次证明(2). 因为

$$\begin{aligned}x(1-x)M_n^{(k)\prime\prime}(\alpha_n,f,x)&=x(1-x)\Big\{(\frac{n}{x(1-x)})^2\cdot\\&\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^i(1-x)^{n-i}(\frac{i}{n}-x)^2(n+k+\alpha_n)^k\int_0^{\frac{1}{n+k+\alpha_n}}\cdots\int\\&f(\frac{i}{n+k+\alpha_n}+y_1+y_2\cdots+y_k)\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2\cdots\mathrm{d}y_k-\\&\frac{n}{[x(1-x)]^2}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^i(1-x)^{n-i}(x^2-2\frac{i}{n}x+\frac{i}{n})(n+k+\alpha_n)^k\\&\int_0^{\frac{1}{n+k+\alpha_n}}\cdots\int f(\frac{i}{n+k+\alpha_n}+y_1+y_2\cdots+y_k)\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2\cdots\mathrm{d}y_k\Big\}\\&=\frac{n(n-1)}{x(1-x)}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^i(1-x)^{n-i}(x-\frac{i}{n})^2(n+k+\alpha_n)^k\cdot\\&\int_0^{\frac{1}{n+k+\alpha_n}}\cdots\int f(\frac{i}{n+k+\alpha_n}+y_1+y_2\cdots+y_k)\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2\cdots\mathrm{d}y_k-\\&n\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^{i-1}(1-x)^{n-i-1}\frac{i}{n}(1-\frac{i}{n})^2(n+k+\alpha_n)^k\cdot\\&\int_0^{\frac{1}{n+k+\alpha_n}}\cdots\int f(\frac{1}{n+k+\alpha_n}+y_1+y_2\cdots+y_k)\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2\cdots\mathrm{d}y_k,\end{aligned}\tag{1.4}$$

(1.4)式中第一项记为 I_1，第二项记为 I_2.

对于 I_1，有 $\|I_1\|_{L_\infty[0,1]}=O(n\|f\|_{L_\infty[0,1]})$，利用 Stirling 公式可得

$$\|I_1\|_{L_1[0,1]}=O(n\|f\|_{L_1[0,1]}).$$

再由 Riesz-Thorin 定理 $\|I_1\|_{L_p[0,1]}=O(n\|f\|_{L_p[0,1]})$. 类似可以得到 $\|I_2\|_{L_p[0,1]}=O(n\|f$

$\| _{L_p[0,1]})$. 综上，结论(2)成立.

进而证明(3). 对 $f\in B_p$，由(1)知

$$M_n^{(k)'}(\alpha_n,f,x)=(n+k+\alpha_n)^k n\sum_{i=0}^{n}\underbrace{\int_0^{\frac{1}{n+k+\alpha_n}}\cdots\int}_{(k+1)\text{个}} f'(\frac{i}{n+k+\alpha_n}+$$
$$y_1+y_2\cdots+y_k+t)\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2\cdots\mathrm{d}y_k\mathrm{d}t\,p_{n-1,i}(x).$$

定义线性算子 L_n

$$L_n(g,x)=n(n+k+\alpha_n)^k\sum_{i=0}^{n}\int_0^{\frac{1}{n+k+\alpha_n}}\cdots\int g(\frac{i}{n+k+\alpha_n}+$$
$$y_1+y_2\cdots+y_k+t)\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2\cdots\mathrm{d}y_k\mathrm{d}t\,p_{n-1,i}(x),\quad 对\ g\in L_{p[0,1]},$$

有

$$\|L_n(g,x)\|_{L_{\infty[0,1]}}\leqslant\|g\|_{L_{\infty[0,1]}},\quad 对\ g\in L_{\infty[0,1]},$$
$$\|L_n(g,x)\|_{L_{1[0,1]}}\leqslant\|g\|_{L_{1[0,1]}},\quad 对\ g\in L_{1[0,1]}.$$

再利用 Riesz-Thorin 定理，得到

$$\|L_n(g)\|_{L_p[0,1]}\leqslant\|g\|_{L_p[0,1]},\quad 对\ g\in L_{p[0,1]},$$

因而对于 $f\in B_p$ 有

$$\|M_n^{(k)'}(\alpha_n,f,x)\|_{L_p[0,1]}=\|L_n(f')\|_{L_p[0,1]}\leqslant\|f'\|_{L_p[0,1]}.$$

故结论(3)成立.

最后证明(4).

对于 $f\in B_p$，由 Abel 变换得

$$M_n^{(k)''}(\alpha_n,f,x)=n(n-1)(n+k+\alpha_n)^k\sum_{i=0}^{n}\int_0^{\frac{1}{n+k+\alpha_n}}\cdots\int f(\frac{i}{n+k+\alpha_n}+$$
$$y_1+y_2\cdots+y_k)\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2\cdots\mathrm{d}y_k(p_{n-2,i-2}(x)-2p_{n-2,i-1}(x)+p_{n-2,i}(x))$$
$$=n(n-1)(n+k+\alpha_n)^k\{\underbrace{\int_0^{\frac{1}{n+k+\alpha_n}}\cdots\int}_{(k+2)\text{个}} f''(y_1+y_2\cdots+y_k+\tau_1+$$
$$\tau_2)\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2\cdots\mathrm{d}y_k\mathrm{d}\tau_1\mathrm{d}\tau_2p_{n-2,0}(x)+\int_0^{\frac{1}{n+k+\alpha_n}}\cdots\int f''(\frac{n-2}{n+k+\alpha_n}+$$
$$y_1+y_2\cdots+y_k+\tau_1+\tau_2)\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2\cdots\mathrm{d}y_k\mathrm{d}\tau_1\mathrm{d}\tau_2p_{n-2,n-2}(x)\}+$$
$$n(n-1)(n+k+\alpha_n)^k\sum_{i=1}^{n-3}\int_0^{\frac{1}{n+k+\alpha_n}}\cdots\int f''(\frac{i}{n+k+\alpha_n}+$$
$$y_1+y_2\cdots+y_k+\tau_1+\tau_2)\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2\cdots\mathrm{d}y_k\mathrm{d}\tau_1\mathrm{d}\tau_2p_{n-2,i}(x)$$
$$=I_{n,1}(f)+I_{n,2}(f),\tag{1.5}$$

其中

$$I_{n,1}(f)=n(n-1)(n+k+\alpha_n)^k\int_0^{\frac{1}{n+k+\alpha_n}}\cdots\int\{f'(\frac{1}{n+k+\alpha_n}+y_1+y_2\cdots+y_{k-1}+$$
$$\tau_1+\tau_2)-f'(y_1+y_2\cdots+y_{k-1}+\tau_1+\tau_2)\}\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2\cdots\mathrm{d}y_{k-1}\mathrm{d}\tau_1 d\tau_2p_{n-2,0}(x)+$$

$$n(n-1)(n+k+\alpha_n)^k\int_0^{\frac{1}{n+k+\alpha_n}}\cdots\int[f'(\frac{n-1}{n+k+\alpha_n}+y_1+y_2\cdots+y_{k-1}+\tau_1+\tau_2)-f'(\frac{n-2}{n+k+\alpha_n}+y_1+y_2\cdots+y_{k-1}+\tau_1+\tau_2)]\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2\cdots\mathrm{d}y_{k-1}\mathrm{d}\tau_1\mathrm{d}\tau_2 p_{n-2,n-2}(x),$$

$$I_{n,2}(f)=n(n-1)(n+k+\alpha_n)^k\sum_{i=1}^{n-3}\int_0^{\frac{1}{n+k+\alpha_n}}\cdots\int f''(\frac{i}{n+k+\alpha_n}+y_1+y_2\cdots+y_k+\tau_1+\tau_2)\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2\cdots\mathrm{d}y_k\mathrm{d}\tau_1\mathrm{d}\tau_2 p_{n-2,i}(x).$$

由于 $f'\in L_{p[0,1]}$，由引理中的(3)可知

$$\|x(1-x)I_{n,1}(f)\|_{L_{p[0,1]}}\leqslant C\|f'\|_{L_{p[0,1]}}. \tag{1.6}$$

为了估计 $I_{n,2}(f)$，对于 $x(1-x)g(x)\in L_{p[0,1]}$ 定义线性算子 $\widetilde{L}_n$：

$$\widetilde{L}_n(g,x)=x(1-x)n(n-1)(n+k+\alpha_n)^k\cdot\sum_{i=1}^{n-3}\int_0^{\frac{1}{n+k+\alpha_n}}\cdots\int g(\frac{i}{n+k+\alpha_n}+y_1+y_2\cdots+y_k+\tau_1+\tau_2)\cdot$$
$$\frac{(\frac{i}{n+k+\alpha_n}+y_1+\cdots+y_k+\tau_1+\tau_2)(1-\frac{i}{n+k+\alpha_n}-y_1-\cdots-y_k-\tau_1-\tau_2)}{(\frac{1}{n+k+\alpha_n}+y_1+\cdots+y_k+\tau_1+\tau_2)(1-\frac{1}{n+k+\alpha_k}-y_1-\cdots-y_k-\tau_1-\tau_2)}\cdot$$
$$\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2\cdots\mathrm{d}y_k\mathrm{d}\tau_1\mathrm{d}\tau_2 p_{n-2,i}(x).$$

对于 $g(x)x(1-x)\in L_{\infty[0,1]}$

$$\|\widetilde{L}_n(g)\|_{L_{\infty[0,1]}}\leqslant\|x(1-x)g(x)\|_{L_{\infty[0,1]}}\cdot\|\sum_{i=1}^{n-3}x(1-x)p_{n-2,i}(x)/(\frac{i}{n+k+\alpha_n}\cdot\frac{n-2+\alpha_n-i}{n+k+\alpha_n})\|_{L_{\infty[0,1]}}\leqslant 4\|x(1-x)g(x)\|_{L_{\infty[0,1]}};$$

对于 $g(x)x(1-x)\in L_{1[0,1]}$ 有

$$\|\widetilde{L}_n(g)\|_{L_{1[0,1]}}\leqslant 4(n+1)(n+k+\alpha_n)^k\sum_{i=1}^{n-3}\int_0^{\frac{1}{n+k+\alpha_n}}\cdots\int g(\frac{i}{n+k+\alpha_n}+y_1+y_2\cdots+y_k+\tau_1+\tau_2)|(\frac{i}{n+k+\alpha_n}+y_1+y_2\cdots+y_k+\tau_1+\tau_2)\cdot(1-\frac{i}{n+k+\alpha_n}-y_1-\cdots-y_k-\tau_1-\tau_2)\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2\cdots\mathrm{d}y_k\mathrm{d}\tau_1\mathrm{d}\tau_2\leqslant 4\|x(1-x)g(x)\|_{L_{1[0,1]}}.$$

利用 Riesz-Thorin 定理，对于 $x(1-x)f''\in L_{p[0,1]}$

$$\|I_{n,2}(f)x(1-x)\|_{L_{p[0,1]}}\leqslant\|\widetilde{L}_n(f'')\|_{L_{p[0,1]}}\leqslant C\|x(1-x)f''\|_{L_{p[0,1]}}. \tag{1.7}$$

又因 $x(1-x)M_n^{(k)''}(\alpha_n,f,x)=x(1-x)I_{n,1}+x(1-x)I_{n,2}$，由(1.6)式及(1.7)式知，引理中结论(4)成立.

2 整体逆定理

定理 设 $f\in L_{p[0,1]}$，如果

$$\| M_n^{(k)}(\alpha_n,f,x)-f(x)\|_{L_{p[0,1]}}=O(n^{-\frac{\beta}{2}})\quad(0<\beta<2),$$

则 $k_p(f,t^2)=O(t^\beta)$，其中

$$k_p(f,h)\triangleq\inf_{g\in B_p}\{\|f-g\|_{L_p}+h(\|g'\|_{L_p}+\|x(1-x)g''(x)\|_{L_p})\}.$$

证明 对于 $f\in L_{p[0,1]}$ 及任意 $g\in B_p$，由引理知 $M_n^{(k)}(\alpha_n,f,x)\in B_p$，根据引理的结论，有

$$\begin{aligned}
k_p(f,t^2)&\leqslant\|f-M_n^{(k)}(\alpha_n,f,x)\|_{L_{p[0,1]}}+\\
&\quad t^2\{\|M_n^{(k)\prime}(f)\|_{L_{p[0,1]}}+\|x(1-x)M_n^{(k)\prime\prime}(\alpha_n,f,x)\|_{L_{p[0,1]}}\}\\
&\leqslant Cn^{-\frac{\beta}{2}}+t^2\{\|M_n^{(k)\prime}(\alpha_n,f-g,x)\|_{L_{p[0,1]}}+\|x(1-x)M_n^{(k)\prime\prime}(\alpha_n,f-g,x)\|_{L_{p[0,1]}}\}+\\
&\quad t^2\{\|M_n^{(k)\prime}(\alpha_n,g,x)\|_{L_{p[0,1]}}+\|x(1-x)M_n^{(k)\prime\prime}(\alpha_n,g,x)\|_{L_{p[0,1]}}\}\\
&\leqslant C\{n^{-\frac{\beta}{2}}+t^2n\|f-g\|_{L_{p[0,1]}}+t^2(\|g'\|_{L_{p[0,1]}}+\|x(1-x)g''\|_{L_{p[0,1]}})\}\\
&=C\{n^{-\frac{\beta}{2}}+t^2n[\|f-g\|_{L_{p[0,1]}}+\frac{1}{n}(\|g'\|_{L_{p[0,1]}}+\|x(1-x)g''\|_{L_{p[0,1]}})]\}.
\end{aligned}$$

由此得到 $k_p(f,t^2)\leqslant C\{n^{-\frac{\beta}{2}}+t^2nk_p(f,\frac{1}{n})\}$. 再利用[3]中的引理，可得 $k_p(f,t^2)=O(t^\beta)$. 这就完成了整体逆定理的证明.

参考文献：

[1] DITZIAN Z and MAY C P. *L_p-Saturation and inverse theorem for modifich Bernstein Polynomials* [J]. Indina Math. J., 1976, 733—751.

[2] 刘吉善，李长青，陈广荣. 推广的 Kantorovich 多项式的一些基本性质 [J]. 数学研究与评论，1993，**13** (2)：237—240.

[3] BECKER M and NESSEC R T. *An Elementary Approach to Inverse Approximation Theorems* [J]. J. A. T., 1978, **23**: 99—103.

[4] 何青，陈广荣. 推广的 Kantorovich 算子的某些重要性质 [J]. 河北科学院学报，1994，11(3).

A Whole Inverse Theorem in the $L_{p[0,1]}(1\leqslant p)$ for Generalized Kantorovich Polynomial Operator

CHEN Guang-rong[1], LIU Ji-shan[2]

(1. Hebei University of Science and Technology, Shijiazhuang 050054;

2. Dalian Fisheries College, 116024)

Abstract: This article obtains, under the satisfied certain condition, a whole inverse theorem of this operator about the generalized kantorovich polynomial operator in the approximate process, thus generalizes Z. Ditzian's resolts in the references[1].

Key words: operator; invense theorem.