一类微分多项式的唯一性定理*

邱 淦 俤
(宁德师专数学系, 福建352100)

摘　要: 本文在涉及慢增长函数的情况下讨论了一类微分多项式的唯一性问题, 推广了 C. C. Yang 及仪洪勋等人的有关结果

关键词: 亚纯函数, 微分多项式, 唯一性
分类号: AMS(1991) 30D35, 30D30/CLC O174. 52
文献标识码: A　　**文章编号**: 1000-341X(1999)增刊-0199-06

1　引言及主要结果

设 f 表示一个超越亚纯函数, 本文采用亚纯函数 Nevanlinna 理论的标准记号[1], 特别地, 用 $S(r,f)$ 表示任意满足 $S(r,f)=o\{T(r,f)\}(r\to\infty;\ r\notin E)$ 的量, 其中 E 是一个线性测度有穷的 r 值的集合. 另外, 用 $E(a,f)$ 表示在 $|z|\le r$ 内 $f-a$ 的零点的集合, 每个零点按其重数计算.

关于亚纯函数及其导数具有某些共同值时的唯一性问题, 1991年, 仪洪勋证明了

定理 A[2]　设 f 与 g 是两个非常数亚纯函数, 满足 $\delta(\infty,f)=\delta(\infty,g)=1$, n 是一个非负整数. 如果 $E(0,f)=E(0,g)$, $E(1,f^{(n)})=E(1,g^{(n)})$ 且 $\delta(0,f)>\frac{1}{2}$, 则

$$f\equiv g \text{ 或者 } f^{(n)}\cdot g^{(n)}=1.$$

1993年, C. C. Yang 与仪洪勋讨论了定理A 的更为一般形式的唯一性问题, 证明了

定理 B[3]　设 f 与 g 是两个非常数亚纯函数, $a(\not\equiv\infty)$, $b(\not\equiv 0,\infty)$ 是两个判别的亚纯函数, 且 $b\not\equiv a^{(n)}$ 及

$$T(r,a)+T(r,b)=\min\{S(r,f),S(r,g)\},$$

如果

$$E(a,f)=E(a,g),\ E(0,f^{(n)}-b)=E(0,g^{(n)}-b),$$
$$E(\infty,f^{(n)}-b)=E(\infty,g^{(n)}-b),$$

且 $(n+2)\Theta(\infty,f)+2\delta(a,f)>n+3$, 则

$$f^{(n)}\equiv g^{(n)} \text{ 或者 } (f^{(n)}-a^{(n)})(g^{(n)}-a^{(n)})=(b-a^{(n)})^2.$$

本文讨论了一类微分多项式的唯一性问题, 进一步推广了上述结果, 得到

定理1　设 f 与 g 是两个非常数亚纯函数,

* **收稿日期**: 1995-11-14

$$P(f)=\sum_{j=0}^{n}a_jf^{(j)}\quad(a_n\not\equiv 0)\tag{1}$$

是 f 的一个微分多项式, $a_j\,(j=0,1,\cdots,n)$ 是亚纯函数, 满足 $T(r,a_j)=S(r,f)\ (j=0,1,\cdots,n)$, 再设 a,b 是两个亚纯函数, 满足

$$T(r,a)+T(r,b)=\min\{S(r,f),S(r,g)\},$$

$a\not\equiv\infty$, $b\not\equiv 0,\infty$ 及 $b\not\equiv\sum_{j=0}^{n}a_ja^{(j)}\overset{\triangle}{=}\alpha$ 如果

$$E(a,f)=E(a,g),\ E(0,p(f)-b)=E(0,p(g)-b),$$
$$E(\infty,p(f)-b)=E(\infty,p(g)-b),\tag{2}$$

且

$$(n+2)\Theta(\infty,f)+2\delta(a,f)>n+3,\tag{3}$$

则 $p(f)\equiv p(g)$ 或者 $(p(f)-\alpha)(p(g)-\alpha)=(b-\alpha)^2$.

2　几个引理

引理1[4]　设 f_1 与 f_2 为两个非常数亚纯函数, $\alpha_1(\not\equiv 0)$ 与 $\alpha_2(\not\equiv 0)$ 是两个亚纯函数, 满足 $T(r,\alpha_1)+T(r,\alpha_2)=o(T(r))\ (r\to\infty;\ r\notin E)$, 若 $\alpha_1f_1+\alpha_2f_2\equiv 1$, 则

$$T(r,f_i)<\overline{N}(r,\frac{1}{f_1})+\overline{N}(r,\frac{1}{f_2})+\overline{N}(r,f_i)+o(T(r))\ (i=1,2;\ r\notin E),$$

其中 $T(r)=\max\{T(r,f_1),T(r,f_2)\}$.

引理2[5]　设 $f_j\,(j=1,2,\cdots,n)$ 是 n 个线性无关的亚纯函数且 $\sum_{j=1}^{n}f_j\equiv 1$, 则

$$T(r,f_j)<\sum_{j=1}^{n}N(r,\frac{1}{f_j})+N(r,f_j)-\sum_{j=1}^{n}N(r,f_j)+N(r,D)+o(T(r))$$
$$(r\notin E;\ j=1,2,\cdots,n),$$

其中 $T(r)=\max\limits_{1\le j\le n}\{T(r,f_j)\}$,

$$D=\begin{vmatrix}f_1 & f_2 & \cdots & f_n\\ f_1' & f_2' & \cdots & f_n'\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & \cdots & f_n^{(n-1)}\end{vmatrix}.$$

引理3　设 f 与 g 是两个非常数亚纯函数, $p(f)$ 与 $p(g)$ 如(1)所定义, 则

$$T(r,p(f))\le T(r,f)+n\overline{N}(r,f)+S(r,f),\tag{4}$$

及

$$T(r,p(g))\le T(r,g)+n\overline{N}(r,g)+S(r,g).\tag{5}$$

证明　首先, 由(1)易知

$$N(r,p(f))\le N(r,f)+n\overline{N}(r,f)+S(r,f).\tag{6}$$

其次, 由于

$$m(r,p(f))\le m(r,\frac{p(f)}{f})+m(r,f)\le\sum_{j=0}^{n}[m(r,a_j)+m(r,\frac{f^{(j)}}{f})]+m(r,f)$$

$$= m(r,f) + S(r,f). \tag{7}$$

结合(6), (7)得

$$T(r,p(f)) \le T(r,f) + n\overline{N}(r,f) + S(r,f).$$

同理可证得(5). □

引理4　设 f 与 g 为两个非常数亚纯函数, $p(f)$ 与 $p(g)$ 为由(1)定义的 f 与 g 的两个微分多项式 再设 $a(\not\equiv\infty)$ 是一个亚纯函数, 满足 $T(r,a)=\min\{S(r,f),S(r,g)\}$, 则

$$N\left(r,\frac{1}{p(f)-\alpha}\right) \le T(r,p(f)) - T(r,f) + N\left(r,\frac{1}{f-a}\right) + S(r,f), \tag{8}$$

及

$$N\left(r,\frac{1}{p(g)-\alpha}\right) \le T(r,p(g)) - T(r,g) + N\left(r,\frac{1}{g-a}\right) + S(r,g), \tag{9}$$

其中 $\alpha=\sum_{j=0}^{n} a_j \cdot a^{(j)}$.

证明　由于

$$p(f) = \sum_{j=0}^{n} a_j f^{(j)} = \sum_{j=0}^{n} a_j (f^{(j)} - a^{(j)}) + \sum_{j=0}^{n} a_j a^{(j)},$$

从而

$$\begin{aligned} m\left(r,\frac{1}{f-a}\right) &\le m\left(r,\frac{p(f)-\alpha}{f-a}\right) + m\left(r,\frac{1}{p(f)-\alpha}\right) \\ &\le \sum_{j=0}^{n}\left[m(r,a_j) + m\left(r,\frac{f^{(j)}-a^{(j)}}{f-a}\right)\right] + m\left(r,\frac{1}{p(f)-\alpha}\right) \\ &= m\left(r,\frac{1}{p(f)-\alpha}\right) + S(r,f). \end{aligned}$$

于是

$$T(r,f) - N\left(r,\frac{1}{f-a}\right) \le T(r,p(f)) - N\left(r,\frac{1}{p(f)-\alpha}\right) + S(r,f),$$

此即证得(8)成立 同理可证得(9)成立 □

引理5　设 $f, g, p(f), p(g)$ 及 a, b 均如定理1所设, 则

$$T(r,f) \le \overline{N}(r,f) + N\left(r,\frac{1}{f-a}\right) + N\left(r,\frac{1}{p(f)-b}\right) + S(r,f), \tag{10}$$

及

$$T(r,g) \le \overline{N}(r,g) + N\left(r,\frac{1}{g-a}\right) + N\left(r,\frac{1}{p(g)-b}\right) + S(r,g). \tag{11}$$

证明　参见文[6]的定理1

引理6　设 f 与 g 是两个非常数亚纯函数, 满足定理1所设条件, 则

$$S(r,f) = S(r,g) = S(r,p(f)) = S(r,p(g)). \tag{12}$$

证明　首先, 由引理3的(4), (5)知

$$S(r,p(f)) \le S(r,f) \text{ 及 } S(r,p(g)) \le S(r,g). \tag{13}$$

其次, 由引理5的(10)得 $[\delta(a,f) + \Theta(\infty,f) - 1]T(r,f) \le T(r,p(f)) + S(r,f)$, 再由定理1的条件(3)知 $\delta(a+f) + \Theta(\infty,f) - 1 > 0$, 于是

$$S(r,f)\le S(r,p(f)). \tag{14}$$

同理可得

$$S(r,g)\le S(r,p(g)). \tag{15}$$

另一方面, 由(10)并考虑到 $E(0,p(f)-b)=E(0,p(g)-b)$, 得 $[\delta(a,f)+\Theta(\infty,f)-1]T(r,f)\le T(r,p(g))+S(r,f)$, 于是

$$S(r,f)\le S(r,p(g)) \tag{16}$$

同理可证

$$S(r,g)\le S(r,p(f)). \tag{17}$$

结合(13)—(14)诸式便推得(12). □

3 定理的证明

定理1的证明 以下为了方便起见, (12)中任意一个均用 $S(r,f)$ 代替.

事实上, 由定理1的条件(2)可设

$$\frac{p(f)-b}{p(g)-b}=e^{\beta},\quad \beta\text{ 为整函数} \tag{18}$$

(i) 若 $e^{\beta}\equiv c$(常数), 假定 $c\ne 1$, 由(18)得

$$\frac{p(f)-\alpha}{\varphi}-\frac{c}{\varphi}(p(g)-\alpha)=1, \tag{19}$$

其中 $\varphi=(1-c)(b-\alpha)\not\equiv 0$ 且 $T(r,\varphi)=S(r,f)$. 于是由引理1及引理4得

$$\begin{aligned}T(r,p(f))&<\overline{N}(r,f)+N\left(r,\frac{1}{p(f)-\alpha}\right)+N\left(r,\frac{1}{p(g)-\alpha}\right)+S(r,f)\\&\le\overline{N}(r,f)+T(r,p(f))-T(r,f)+N\left(r,\frac{1}{f-a}\right)+\\&\quad N\left(r,\frac{1}{g-a}\right)+n\overline{N}(r,g)+S(r,f).\end{aligned}$$

因此 $T(r,f)<(n+1)\overline{N}(r,f)+2N\left(r,\frac{1}{f-a}\right)+s(r,f)$. 由此推得

$$(n+1)\Theta(\infty,f)+2\delta(a,f)\le n+2.$$

结合条件(3)得 $\Theta(\infty,f)>1$. 这是不可能的. 所以 $c=1$. 由(18)即得 $p(f)\equiv p(g)$.

(ii) $e^{\beta}\not\equiv$ 常数. 由(18)得

$$\frac{p(f)-\alpha}{b-\alpha}-\frac{p(g)-\alpha}{b-\alpha}e^{\beta}+e^{\beta}=1. \tag{20}$$

令 $f_1=\frac{p(f)-\alpha}{b-\alpha}$, $f_2=\frac{p(g)-\alpha}{b-\alpha}e^{\beta}$, $f_3=e^{\beta}$, 则

$$f_1+f_2+f_3\equiv 1. \tag{21}$$

倘若 f_1,f_2,f_3 线性无关, 由引理2得

$$T(r,p(f))<N\left(r,\frac{1}{p(f)-\alpha}\right)+N\left(r,\frac{1}{p(g)-\alpha}\right)+N(r,D)-N(r,p(g))+o(T(r)), \tag{22}$$

其中 $T(r)=\max\limits_{1\le j\le 3}\{T(r,f_j)\}$,

$$D=\begin{vmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \\ f_1' & f_2' & f_3' \\ f_1'' & f_2'' & f_3'' \end{vmatrix}.$$

由(21)知

$$D=\begin{vmatrix} 1 & f_2 & f_3 \\ 0 & f_2' & f_3' \\ 0 & f_2'' & f_3'' \end{vmatrix},$$

于是

$$N(r,D)-N(r,p(g))\le 2\overline{N}(r,f)+o(T(r)). \tag{23}$$

再由(18)易知 $o(T(r))=S(r,f)$.

将(23)代入(22)得

$$\begin{aligned} T(r,p(f)) &\le N\left(r,\frac{1}{p(f)-\alpha}\right)+N\left(r,\frac{1}{p(g)-\alpha}\right)+2\overline{N}(r,f)+S(r,f) \\ &\le T(r,p(f))-T(r,f)+N\left(r,\frac{1}{f-a}\right)+N\left(r,\frac{1}{g-a}\right)+ \\ &\quad (n+2)\overline{N}(r,f)+S(r,f), \end{aligned}$$

于是 $T(r,f)\le(n+2)\overline{N}(r,f)+2N\left(r,\frac{1}{f-a}\right)+S(r,f)$, 从而

$$(n+2)\Theta(\infty,f)+2\delta(a,f)\le n+3,$$

与条件(3)矛盾. 故 f_1,f_2,f_3 线性相关, 即存在三个不全为零的常数 c_1,c_2,c_3 使得

$$c_1f_1+c_2f_2+c_3f_3=0. \tag{24}$$

若 $c_1=0$, 则 c_2 与 c_3 至少有一个不为零. 由(24)得 $c_2p(g)=c_2\alpha+c_3(b-\alpha)$. 由 $b\ne\alpha$ 知 $c_2\ne0$, 因此

$$p(g)=\left(1-\frac{c_3}{c_2}\right)\alpha+c_3b,$$

这是不可能的. 于是 $c_1\ne0$. 结合(21), (24)得

$$\left(\frac{c_2}{c_1}-1\right)\frac{p(g)-\alpha}{b-\alpha}e^{\beta}+\left(1-\frac{c_3}{c_1}\right)e^{\beta}=1, \tag{25}$$

由 $e^{\beta}\ne$ 常数知 $\frac{c_2}{c_1}-1\ne0$. 若 $1-\frac{c_3}{c_1}\ne0$, 则由引理1得

$$T(r,p(g))<\overline{N}(r,g)+N\left(r,\frac{1}{p(g)-\alpha}\right)+S(r,f).$$

于是由引理4的(9)得

$$T(r,g)<\overline{N}(r,f)+N\left(r,\frac{1}{f-a}\right)+S(r,f). \tag{26}$$

另一方面, 根据引理5及引理3得

$$\begin{aligned} T(r,f) &< \overline{N}(r,f)+N\left(r,\frac{1}{f-a}\right)+N\left(r,\frac{1}{p(f)-b}\right)+S(r,f) \\ &= \overline{N}(r,f)+N\left(r,\frac{1}{f-a}\right)+N\left(r,\frac{1}{p(g)-b}\right)+S(r,f) \\ &\le \overline{N}(r,f)+N\left(r,\frac{1}{f-a}\right)+T(r,p(g))+S(r,f) \\ &\le T(r,g)+(n+1)\overline{N}(r,f)+N\left(r,\frac{1}{f-a}\right)+S(r,f). \end{aligned} \tag{27}$$

结合(26), (27)得 $T(r,f) < (n+2)\overline{N}(r,f) + 2N\left(r,\frac{1}{f-a}\right) + S(r,f)$, 从而$(n+2)\Theta(\infty,f) + 2\delta(a,f) \leq n+3$, 也与条件(3)矛盾. 因此$1-\frac{c_3}{c_1}=0$. 由(25)得

$$\frac{p(g)-\alpha}{b-\alpha}e^{\beta} = \frac{c_1}{c_2-c_1}. \tag{28}$$

结合(20), (28)得

$$\frac{p(f)-\alpha}{b-\alpha} + e^{\beta} = \frac{c_2}{c_2-c_1}. \tag{29}$$

再由引理1类似于上述证明易知 $c_2=0$. 因而由(28), (29)分别可得

$$\frac{p(g)-\alpha}{b-\alpha} = -e^{-\beta}, \tag{30}$$

及

$$\frac{p(f)-\alpha}{b-\alpha} = -e^{\beta}. \tag{31}$$

结合(30), (31)就得$(p(f)-\alpha)(p(g)-\alpha) = (b-\alpha)^2$. 定理1得证.

参 考 文 献

[1] Hayman W K. *Meromorphic Functions* [M]. Clarendon Press, Oxford, 1964.
[2] 仪洪勋. 关于C. C. Yang的一个问题 [J]. 数学年刊A辑, 1991, **12**: 487- 491.
[3] Yang C C, 仪洪勋. 亚纯函数导数的唯一性定理 [J]. 数学学报, 1993, **36**: 387- 396.
[4] 仪洪勋. 具有两个亏值的亚纯函数 [J]. 数学学报, 1987, **30**: 588- 597.
[5] Gross F. *Factorization of meromorphic functions* [M]. U. S. Govt. Math. Res. Center. 1972.
[6] 扈培础. 海曼不等式的推广 [J]. 数学杂志, 1990, **10**: 405- 412.

Unicity Theorem of a Kind of Differential Polynomial

Qiu Gandi
(Dept. of Math., Ningde Teachers' College, Fujian 352100)

Abstract

The unicity problem of a kind of differential polynomial relate to the small functions be studied in this paper, and some results of C. C. Yang, Yi Hongxun etc be generalized.

Keywords meromorphic function, differential polynomial, uniqueness