第19卷 增刊
1999年4月
数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION
Vol 19 Supp
Apr. 1999

关于代数体函数 Borel 方向的一个结果*

高 宗 升
(北京航空航天大学应用数学系, 100083)

摘 要: 本文证明了下列定理: 设 $w = w(z)$ 为 $|z| < \infty$ 上的 υ 值代数体函数, 它的级满足 $0 < \rho < \infty$, 则存在一条方向 $L: \arg z = \theta_0 (0 \le \theta_0 < 2\pi)$, 使得对于任意给定的 δ, $0 < \delta < \frac{\pi}{2}$, 在角域 $\Delta(\theta_0, \delta)$ 内

$$\overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{\log \bar{n}^{3)}(r, \Delta(\theta_0, \delta), a)}{\log r} = \rho$$

对任何值 a 成立, 至多除去 $3\upsilon - 1$ 个例外.

关键词: 代数体函数, 覆盖曲面, Borel 方向
分类号: AMS(1991) 30D35/CLC O174.51
文献标识码: A **文章编号**: 1000-341X(1999)增刊-0205-06

关于代数体函数 Borel 方向的存在性, Valiron[1], Rauch[2], Toda[3] 等人曾作过重要研究. 对于有限正级情形, 由吕以辇, 顾永兴[4] 彻底解决. 但是对于重值情形, 一直没有相应的结果, 本文对此进行了研究, 得到了上述摘要中的结果.

1 符号与定义

设 $w = w(z)$ 为方程

$$A_\upsilon(z) w^\upsilon + A_{\upsilon-1}(z) w^{\upsilon-1} + \cdots + A_0(z) = 0 \tag{1}$$

所定义的 υ 值代数体函数, 其中 $A_\upsilon(z), \cdots, A_0(z)$ 为 $|z| < \infty$ 上的整函数, 没有公共零点. $w(z)$ 是 υ 值函数, 它的定义域是一个 Riemann 曲面 $\tilde{R}_z$, $\tilde{R}_z$ 是 z 平面的 υ 叶覆盖, $\tilde{R}_z$ 的点用 $\tilde{z}$ 表示, $\tilde{z}$ 在 z 平面上的投影是 z, $\tilde{R}_z$ 在 $|z| < r$ 上部分记为 $|\tilde{z}| < r$, $n(r, a)$ 为 $|\tilde{z}| < r$ 内 $w(z) = a$ 的根的个数. $n^{3)}(r, a)$ 表示 $|\tilde{z}| < r$ 内 $w(z) = a$ 的重级 ≤ 3 的根的个数. 如果 $|\tilde{z}| < r$ 内 $w(z) = a$ 的每个重级 ≤ 3 的根仅算一次, 记为 $\bar{n}^{3)}(r, a)$. $n^{(3}(r, a)$ 表示 $|\tilde{z}| < r$ 中 $w(z) = a$ 重级大于3的根的个数, $\bar{n}^{(3}(r, a)$ 的意义同前. 令

$$S(r, w) = \frac{1}{\pi} \iint_{|\tilde{z}| \le r} \left(\frac{|w'(z)|}{1 + |w(z)|^2} \right)^2 dw, \quad T(r, w) = \frac{1}{\upsilon} \int \frac{S(r, w)}{r} dr,$$

$S(r, w)$ 是 $w(z)$ 覆盖单位 w-球面的面积平均值, $T(r, w)$ 称为 $w(z)$ 的特征函数. $w(z)$ 的级定

* 收稿日期: 1996-04-12
作者简介: 高宗升(1953-), 男, 河南偃师人, 博士, 北京航空航天大学教授. 目前从事复分析及随机级数的研究.

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

义为 $\rho=\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log^+ T(r,w)}{\log r}$. 本文恒假定$0<\rho<\infty$. 又设 $n(r,\tilde{R}_z)$ 为 $\tilde{R}_z$ 在 $|z|\le r$ 上的分支点总数, 分支的级计算在内,

$$N(r,\tilde{R}_z)=\frac{1}{\upsilon}\int\frac{n(r,\tilde{R}_z)-n(0,\tilde{R}_z)}{r}\mathrm{d}r+\frac{n(0,\tilde{R}_z)}{\upsilon}\log r.$$

由[3]知

$$N(r,\tilde{R}_z)\le 2(\upsilon-1)T(r,w)+O(1). \tag{2}$$

定义 z 平面上的角域 $\Delta(\theta_0,\delta)=\{z\,|\,|\arg z-\theta_0|<\delta\}$, $0\le\theta_0<2\pi$, $0<\delta<\frac{\pi}{2}$. $\tilde{R}_z$ 在 $\Delta(\theta_0,\delta)$ 上的部分用 $\tilde{\Delta}(\theta_0,\delta)$ 表示之 $n(r,\Delta(\theta_0,\delta),a)$ 表示方程 $w(z)=a$ 在 $\tilde{\Delta}(\theta_0,\delta)\cap\{|\tilde{z}|\le r\}$ 内根的个数, 重级计算在内. 类似前面可定义 $\bar{n}^{3)}(r,\Delta(\theta_0,\delta),a)$ 等. 把下式

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log^+ n(r,\Delta(\theta_0,\delta),a)}{\log r}\le\rho \tag{3}$$

中等号不成立的点 a 称为 $w(z)$ 在角域 $\Delta(\theta_0,\delta)$ 内的 Borel 例外值. 文献[4]指出, 这种例外值至多有2υ个. 这时称 $L:\arg z=\theta_0$ 为 $w(z)$ 的一条 Borel 方向.

2 引理及其证明

设 V 是直径为1的 Riemann 球面, F_0 是 V 上的单连通区域, 其边界 ∂F_0 为有限条互不相交的圆曲线$\{\Lambda_j\}$组成, 且任意两条间的球距 $|\Lambda_i,\Lambda_j|\ge\delta\in(0,\frac{1}{2})$ $(i\ne j)$.

设 F 是 F_0 的有限覆盖曲面, 其边界是有有限条解析 Jordan 曲线组成, 称 ∂F 落在 F_0 内的部分为 F 对 F_0 的相对边界, 其长记为 L.

设区域 $D\subset F_0$, ∂D 是由点或解析 Jordan 曲线组成, F 覆盖在 D 上的部分记为 $F(D)$, 分别称 $S=\frac{|F|}{|F_0|}$, $S(D)=\frac{|F(D)|}{|D|}$ 为 F_0 和 D 的平均覆盖次数. 其中 $|F|$, $|F_0|$, $|F(D)|$ 及 $|D|$ 分别表示 F, F_0, $F(D)$ 及 D 的曲面面积.

引理1[6] F, F_0 如上所述, $\rho(F)$, $\rho(F_0)$ 分别是 F 和 F_0 的特征数, 则

$$\rho^+(F)\ge\rho(F_0)S-2^5\pi^2\delta^3L,$$

其中 $\rho^+=\max\{\rho,0\}$, L 为 F 对于 F_0 的相对边界长.

引理2[6] $|S-S(D)|<\max\{\frac{2}{\delta},\frac{\pi^2}{|D|}\}L$.

设 D_j $(j=1,2,\cdots,q)$ 是 V 上 $q(\ge 3)$ 个互不相交的圆, 其任意两个之间的球面距离 $d(D_i,D_j)\ge\delta\in(0,\frac{1}{2})$ $(i\ne j)$. 从 V 上取出$\{D_j\}$, 令 $F_0=V-\sum_{j=1}^{q}D_j$, 则 $\rho(F_0)=q-2$.

设 $F(D_j)$ 为 F 覆盖在 D_j 上的部分, 它由有限个连通曲面组成, 记为

$$F(D_j)=\sum_k F^i_{j,k}+\sum_k F^z_{j,k},$$

这里 $F^i_{j,k}$ 关于 D_j 没有相对边界, 称为岛, $F^z_{j,k}$ 关于 D_j 有相对边界, 称为半岛. 若 F 至少完全覆盖 $F^i_{j,k}$ 两次, 则称其为多叶单连通岛, 否则称为单叶单连通岛.

引理3 设 F 是球面 V 上的 m 个连通有限覆盖曲面, $\rho(F)=\tilde{n}-m$ (这里 $\tilde{n}$ 为某一有限

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

非负整数), 又 n_j 是 $F(D_j)$ $(j=1,2,\cdots,q)$ 中单连通岛的个数, 则

$$\tilde{n}+\sum_{j=1}^{q}n_j\geq(q-2)S-\frac{2^3\cdot5\cdot\pi^2}{\delta^3}L,$$

其中 L 是 F 的相对边界长

证明 从 F 中去掉 $\{D_j\}$ 上的所有半岛 $\{F^z_{j,k}\}$, 记 F' 是剩下的部分, 则

$$F=\sum_{j=1}^{q}\sum_{k}F^z_{j,k}+F'.$$

再从 F' 中去掉 $\{D_j\}$ 的所有岛 $\{F^i_{j,k}\}$, 记 F'' 是剩下的曲面, 则 $F'=\sum_{j=1}^{q}\sum_{k}F^i_{j,k}+F''$, F'' 是由有限个曲面组成, 设其可表为 $F''=\sum_{\mu}F''_{\mu}$, 则 $F'=\sum_{j=1}^{q}\sum_{k}F^i_{j,k}+\sum_{\mu}F''_{\mu}$ 因为 F' 是通过环切由 $\{F^i_{j,h}\}$ 和 $\{F''_{\mu}\}$ 组成, 故特征数满足 $\rho(F')=\sum_{j=1}^{q}\sum_{k}\rho(F^i_{j,k})+\sum_{\mu}\rho(F''_{\mu})$.

由于 F 是连通曲面, 设 F' 是由 $N(F')=N$ 片连通曲面组成, 则

$$\rho(F')\leq\tilde{n}-N(F'),$$

$$\tilde{n}-N(F')\geq\rho(F')=\sum_{j=1}^{q}\sum_{k}\rho(F^i_{j,k})+\sum_{\mu}\rho^+(F''_{\mu})-N(F''),$$

其中 $N(F'')$ 表示单连通的 F''_{μ} 的个数

由于 $\sum_{j=1}^{q}\sum_{k}\rho(F^i_{j,k})=\sum_{j=1}^{q}\sum_{k}\rho^+(F^i_{j,k})-\sum_{j=1}^{q}n_j$, 从而

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{q}n_j&=\sum_{j=1}^{q}\sum_{k}\rho^+(F^i_{j,k})-\sum_{j=1}^{q}\sum_{k}\rho(F^i_{j,k})\\&\geq\sum_{j=1}^{q}\sum_{k}\rho^+(F^i_{j,k})+\sum_{\mu}\rho^+(F''_{\mu})-N(F'')+N(F')-\tilde{n}.\end{aligned}$$

因为 $N(F')-N(F'')\geq0$, 所以 $\tilde{n}+\sum_{j=1}^{q}n_j\geq\sum_{\mu}\rho^+(F''_{\mu})$.

由于 F''_{μ} 是 F_0 的一个覆盖曲面, 由引理 1, $\rho^+(F''_{\mu})\geq(q-2)S''_{\mu}-\frac{2^5\pi^2}{\delta^3}L''_{\mu}$ 这里 $S''_{\mu}=|F''_{\mu}|/|F_0|$, L''_{μ} 是 F''_{μ} 对 F_0 的相对边界长 因此

$$\tilde{n}+\sum_{j=1}^{q}n_j\geq\sum_{\mu}(q-2)S''_{\mu}-\sum_{\mu}\frac{2^5\pi^2}{\delta^3}L''_{\mu}\geq(q-2)S''-\frac{2^5\pi^2}{\delta^3}L.\tag{4}$$

这里 $S''=\sum_{\mu}S''_{\mu}$ 由引理 2, $|S-S''|<\max\{\frac{2}{\delta},\frac{\pi^2}{|F_0|}\}L$.

由于 $|F_0|<|V|=\pi$, 则 $\pi^2/|F_0|\geq1$, 因此 $|S-S''|<\frac{2}{\delta}\frac{\pi^2}{|F_0|}L$. 从而

$$S''>S-\frac{2}{\delta}\frac{\pi^2}{|F_0|}L.\tag{5}$$

注意到 $q(\frac{\delta}{2})^2\leq|F_0|$(这是由于令 $E_j=\{x\in V,|x,D_j|<\frac{\delta}{2}\}$. 因 $\{E_j\}$ 互不相交且 $|E_j|\geq(\frac{\delta}{2})^2$ 之故), 则由(4), (5) 两式

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

$$\tilde{n}+\sum_{j=1}^{q}n_j\geq(q-2)\left(S-\frac{2^3}{\delta^3}\frac{\pi^2}{q}L\right)-\frac{2^5\pi^2}{\delta^3}L\geq(q-2)S-2^3\cdot5\cdot\pi^2\delta^{-3}L.$$

引理 4 在引理 3 的条件下, 若$\{D_j\}(1\leq j\leq q)$ 是半径为$\frac{\delta}{3}$的圆域, $n_j^{(3)}$ 是 $F(D_j)$ 中页数 ≤ 3 的单连通岛个数, 则$\frac{4}{3}\tilde{n}+\sum_{j=1}^{q}n_j^{(3)}\geq\frac{1}{3}(3q-8)S-\frac{2^3\cdot3^2\pi^3\delta^{-2}+5\cdot2^5\pi^2}{3\delta^3}L$.

证明 由于 n_j 是 $F(D_j)$ 中单连通岛的个数, $n_j^{(3)}$ 是其中叶数 ≤ 3 者, $n_j^{(3}$ 是其中页数 >3 者, 则 $n_j=n_j^{(3)}+n_j^{(3}$, $S(D_j)\geq n_j^{(3)}+4n_j^{(3}$. 所以

$$S(D_j)\geq4(n_j^{(3)}+n_j^{(3)})-3n_j^{(3)}=4n_j-3n_j^{(3)}. \tag{6}$$

由于 $|D_j|\geq\frac{\delta^2}{9}$, 由引理 2, $S+\frac{18\pi^2}{\delta^3}>S(D_j)$. 再由(6), $S+\frac{18\pi^2}{\delta^3}L>4n_j-3n_j^{(3)}$, 所以

$$qS+3\sum_{j=1}^{q}n_j^{(3)}+\frac{18\pi^2}{\delta^3}qL>4\sum_{j=1}^{q}n_j.$$

由引理 3, 并注意到 $q(\frac{\delta}{2})^2\leq\pi$, 则 $4\tilde{n}+3\sum_{j=1}^{q}n_j^{(3)}>(3q-8)S-\frac{3^2\cdot2^3\pi^3\delta^{-2}+2^5\cdot5\pi^2}{\delta^3}L$.

引理 5 设$w=w(z)$ 是 $|z|<R\ (0<R<\infty)$ 上的 υ 值代数体函数, F 是由$w(z)$ 生成的单位球面 V 上的 Riemann 曲面. 设 $D_1,\cdots,D_q$ 是 V 上互不相交的 $q(q\geq3)$ 个半径均为$\frac{\delta}{3}$的圆域, $d(D_i,D_j)\geq\delta\in(0,\frac{1}{2})\ (i\neq j)$. 若 $n_j^{(3)}$ 是 $F(D_j)$ 中页数 ≤ 3 的单连通岛的个数, 那么对于 $\forall r\in(0,R)$, 有

$$\frac{(3q-8)}{3}S(r)\leq\sum_{j=1}^{q}n_j^{(3)}+\frac{4}{3}n(R,\tilde{R}_z)+h^2(\delta)\upsilon\pi^2\frac{R}{R-r},$$

这里 $h(\delta)=\frac{2^3\cdot3^2\pi^3\delta^{-2}+2^5\cdot5\cdot\pi^2}{\delta^3}$.

证明 从球面 V 上去掉 $D_1,\cdots,D_q$, 记剩下的部分为 F_0, $\rho(F_0)=q-2$.

由于$w=w(z)$ 为 $|z|<R$ 内的 υ 值代数体函数, 它的定义域为$\tilde{R}_z$, $\tilde{R}_z$ 在平面上的投影为 $|z|<R$. 设$\tilde{D}_r=\{|\tilde{z}|<r\}(r\in(0,R))$ 为$\tilde{R}_z$ 在 $|z|<r$ 上的部分. 由 M. Hurwitz 公式[7]

$$\rho(\tilde{D}_r)=n(r,\tilde{R}_z)-\upsilon$$

由引理 3, $n(r,\tilde{R}_z)-\upsilon\geq(q-2)S(r)-\frac{2^3\cdot5\cdot\pi^2}{\delta^3}L(r)$, 这里

$$S(r)=\frac{1}{\pi}\iint_{|\tilde{z}|\leq r}\left(\frac{|w'(z)|}{1+|w(z)|^2}\right)^2\mathrm{d}w,\quad L(r)=\int_{|\tilde{z}|=r}\left(\frac{|w'(re^{i\varphi})|}{1+|w(re^{i\varphi})|^2}\right)r\mathrm{d}\varphi$$

再由引理 4, $\frac{4}{3}n(r,\tilde{R}_z)-\frac{4}{3}\upsilon+\sum_{j=1}^{q}n_j^{(3)}\geq\frac{(3q-8)}{3}S(r)-\frac{h(\delta)}{3}L(r)$. 从而

$$N\overset{\triangle}{=}\sum_{j=1}^{q}n_j^{(3)}+\frac{4}{3}n(R,\tilde{R}_z)\geq\frac{1}{3}(3q-8)S(r)-\frac{h(\delta)}{3}L(r).$$

下面分情况进行讨论:

(i) 若对于 $\forall r'\in(r,R)$, 有$(3q-8)S(r')-3N>0$. 由 Schwarz 不等式

$$L^2(r)\leq2\pi^2\upsilon r\frac{\mathrm{d}S(r)}{\mathrm{d}r}\leq2\upsilon\pi^2R\frac{\mathrm{d}S(r)}{\mathrm{d}r}.$$

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

因此$\left(\frac{(3q-8)}{3}S(r')-N\right)^2 \le \frac{h^2(\delta)}{9}\cdot 2\upsilon\pi^2 R\frac{\mathrm{d}S(r')}{\mathrm{d}r'}$, 从而

$$R-r=\int \mathrm{d}r' \le h^2(\delta)\cdot 9^{-1}2\upsilon\pi^2 R\int\frac{\mathrm{d}S(r')}{\left(\frac{3q-8}{3}S(r')-N\right)^2}$$

$$\le \frac{2}{9}\upsilon\pi^2 R h^2(\delta)\left[\frac{3q-8}{3}S(r)-N\right]^{-1}\frac{3}{3q-8},$$

所以

$$\frac{3q-8}{3}S(r)\le \sum_{j=1}^{q} n_j^{3)}+\frac{4}{3}n(R,\tilde{R}_z)+\upsilon\pi^2 h^2(\delta)\frac{R}{R-r}.$$

(ii) 若存在某个 $r'\in(r,R)$, 使$(3q-8)S(r')-N\le 0$, 则由$(3q-8)S(r)\le(3q-8)S(r')\le N$ 推出引理成立.

引理 6 设$w=w(z)$ 为 $|z|<R$ 内υ值代数体函数, $a_1,\cdots,a_q$ 为球面V 上q 个不同的点, 且任意两点的球距 $\ge\delta\in(0,\frac{1}{2})$, 若 $\bar{n}^{3)}(R,a_j)$ 表示 $|z|<R$ 内$w(z)-a_j$ 的零点个数, 且重级 ≤ 3 的仅算一次, >3 的不计在内, 则

$$\frac{3q-8}{3}S(r)\le 3\sum_{j=1}^{q}\bar{n}^{3)}(R,a_j)+\frac{4}{3}n(R,\tilde{R}_z)+h^2(\delta)\upsilon\pi^2\frac{R}{R-r}.$$

证明 由引理 5 立得.

由引理 6 及(2) 式, 用类似于文献[8] 中引理 2 的方法, 不难得到如下

引理 7 设$w=w(z)$ 为 $|z|<\infty$ 上的υ值代数体函数, 它的级满足 $0<\rho<\infty$, 则必存在一充满圆序列 Γ_n: $\{|z-z_n|<r_n\sigma_n\}$, $n=1,2,\cdots$, 其中 $z_n=r_n e^{i\theta_n}$, $\lim\limits_{n\to\infty}r_n=\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n=0$ $(\sigma_n>0)$. 使得在每个Γ_n 内, $w(z)-a$ $(\forall a\in\mathbf{C})$ 取重级 ≤ 3 的零点个数至少 $r_n^{\rho-\epsilon_n}$ 次(不计重级), 至多除去一些复数可含于 $3\upsilon-1$ 个球面半径为 $r_n^{-\frac{\rho}{11}}$ 的球面圆内, 且$\lim\limits_{n\to\infty}\epsilon_n=0$.

3 定理及其证明

定理 设$w=w(z)$ 为 $|z|<\infty$ 内υ值代数体函数, 它的级满足 $0<\rho<\infty$, 则存在一条方向$L:\arg z=\theta_0$ $(0\le\theta_0<2\pi)$, 使得对于任意给定的 δ, $0<\delta<\frac{\pi}{2}$, 在角域 $\Delta(\theta_0,\delta)$ 内

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log\bar{n}^{3)}(r,\Delta(\theta_0,\delta),a)}{\log r}=\rho$$

对任何值 a 成立, 至多除去 $3\upsilon-1$ 个例外值. 其中 $\bar{n}^{3)}(r,\Delta(\theta_0,\delta),a)$ 表示方程$w(z)=a$ 在 $\tilde{\Delta}(\theta_0,\delta)\cap\{|\tilde{z}|\le r\}$ 内根的个数, 且重级不超过 3 的仅算一次, 重级大小 3 的不计.

证明 由引理 7, 存在$w=w(z)$ 的一列充满圆 Γ_n: $\{|z-z_n|<r_n\sigma_n\}$. 在每个Γ_n 内, 对于任意复数 a, $w(z)-a$ 取重级 ≤ 3 的零点个数至少 $r_n^{\rho-\epsilon_n}$ 次(不计重级), 至多除去一些复数, 可含于 $3\upsilon-1$ 个球面半径为 $r_n^{-\frac{\rho}{11}}$ 的球面圆内, 且$\lim\limits_{n\to\infty}\epsilon_n=0$.

若 θ_0 是$\{\arg z_n\}$ 的一个聚点, 则半直线$L:\arg z=\theta_0$ 即具有定理中所述性质, 不失一般性, 不妨假定$\lim\limits_{n\to\infty}\arg z_n=\theta_0$ $(0\le\theta_0<2\pi)$.

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

若定理不真, 则至少存在 3υ 个点 a_j $(j = 1, 2, \cdots, 3\upsilon)$, 以及某个正数 δ_0, 使

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log \bar{n}^{3)}(r, \Delta(\theta_0, \delta_0), a_j)}{\log r} < \rho, \quad j = 1, 2, \cdots, 3\upsilon \tag{7}$$

另一方面, 注意到 $\arg z_n \to \theta_0$, 则存在适当大的 n_0, 当 $n \geq n_0$ 时, 圆

$$\Gamma_n \subset \{z;\ |\arg z - \theta_0| < \delta_0\}.$$

令 $\epsilon_0 = \min\limits_{1\leq i\neq j\leq 3\upsilon}\{|a_i, a_j|\}$, 则 $\epsilon_0 > 0$. 取 n_0 充分大, 当 $n \geq n_0$ 时, 有 $r_n^{-\frac{\rho}{11}} < \frac{\epsilon_0}{2}$. 由充满圆序列的定义, 存在圆序列 $\{\Gamma_n\}$ 的一个子列 $\{\Gamma_{n_k}\}$ $(k = 1, 2, \cdots)$, 使得对于 a_j $(j = 1, 2, \cdots, 3\upsilon)$ 中的一个, 不妨设为 a_1, 有 $\bar{n}^{3)}(\Gamma_{n_k}, w = a_1) \geq r_{n_k}^{\rho-\epsilon_n}$. 于是

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log \bar{n}^{3)}(r, \Delta(\theta_0, \delta), a_1)}{\log r} \geq \overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{\log \bar{n}^{3)}(\Gamma_{n_k}, w = a_1)}{\log 2r_{n_k}} \geq \overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{\log r_{k_n}^{\rho-\epsilon_n}}{\log 2r_{n_k}} = \rho.$$

此与 (7) 式矛盾.

参 考 文 献

[1] Valiron G. C. R. Acad. Sci. Paris, 1938, **206**: 735-737.

[2] Rauch A. C. R. Acad. Sci. Paris, 1936, **202**: 2041-2043.

[3] Toda N. Nagoya Math. Journal, 1969, **34**: 1-23.

[4] 吕以辇, 顾永兴. 科学通报, 1983, **5**: 264-266.

[5] Tsuji M. *Potential theory in modern function theory* [M]. Tokyo, Maruzen, 1959.

[6] Sun Daochun. Acta Math. Scientia, 1994, **14**: 213-225.

[7] Tumura Y. Japanese Journ. Math., 1942-1943, **18**: 303-322.

[8] 孙道椿. 数学年刊, 1995, **2**: 238-242.

A Result of Borel's Direction for Algebroid Functions

Gao Zongsheng

(Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083)

Abstract

In this paper, the following theorem is obtained: Let $w = w(z)$ be a υ-valued algebroid function of finite order $\rho > 0$ for $|z| < \infty$, then there exists a direction $L: \arg z = \theta_0$ $(0 \leq \theta_0 < 2\pi)$, such that for any $\delta > 0$ $(\delta < \frac{\pi}{2})$,

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log \bar{n}^{3)}(r, \Delta(\theta_0, \delta), a)}{\log r} = \rho$$

with $3\upsilon - 1$ possible exceptions for any value of a. Where $\bar{n}^{3)}(r, \Delta(\theta_0, \delta), a)$ is the numbers of distinct zeros with multiplicity ≤ 3 of $w(z) - a$ in $\tilde{\Delta}(\theta_0, \delta) \cap \{|\tilde{z}| \leq r\}$.

Keywords algebroid function, covering surfaces, Borel's direction.

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.