第19卷 增刊 数学研究与评论 Vol. 19 Supp
1999年4月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Apr. 1999

欧氏空间中子流形的Pinching现象*

李 琦 陈建华
(锦州师范学院, 辽宁121003)

摘 要: 本文研究了欧氏空间中紧致子流形的Pinching现象, 得到了一些公式, 并证明了一些几何量的Pinching定理.

关键词: 子流形, 支撑函数, Pinching.
分类号: AMS(1991) 53B25/CLC O186.16
文献标识码: A **文章编号**: 1000-341X(1999)增刊-0217-05

1 引 言

关于空间形式中子流形的Pinching现象, 已经有了很多深入的结果, 本文对欧氏空间子流形的一些几何量进行了探讨, 得到了一些公式以及下面的若干结果.

定理1 设M是欧氏空间R^{n+p}的n维紧致子流形, 若$0\le P^2S\le n$, 那么$P^2S\equiv n$, 且M是球面. 其中S为M的第二基本形式模长平方, P是M的位置向量的法分量.

用R, R_{ij}和R_{ijkl}记M的数量曲率, Ricci曲率张量和黎曼曲率张量的分量, 有下面的结论.

定理2 设M是欧氏空间中具有非负Ricci曲率的紧致可定向超曲面, 若$0\le P^2R\le n(n-1)$, 则$P^2R\equiv n(n-1)$, 且M只能是超球面. 其中P为M的支撑函数.

推论1 设M是欧氏空间中具有非负Ricci曲率的紧致可定向超曲面, 若

$$0\le P^4\sum R_{ijkl}^2\le 2n(n-1),$$

则

$$P^4\sum R_{ijkl}^2\equiv 2n(n-1),$$

且M只能是超球面.

推论2 设M是欧氏空间中具有非负Ricci曲率的紧致可定向超曲面, 若

$$0\le P^4\sum R_{ij}^2\le n(n-1)^2,$$

则

$$P^4\sum R_{ij}^2\equiv n(n-1)^2,$$

且M只能是超球面.

* 收稿日期: 1996-12-17
基金项目: 辽宁省教委资助项目(95311169)

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

对于超曲面, P^2S, P^2R, $P^4\sum R_{ij}^2$ 和 $P^4\sum R_{ijkl}^2$ 是否存在第二空隙呢?在 P^2S 和 P^2R 为常数时, 证明了下面的定理

定理3 设 M 是欧氏空间中严格凸的紧致可定向超曲面, 若 P^2S 是非零常数, 则只有 $P^2S = n$, 且 M 必为超球面

定理4 设 M 是欧氏空间中的紧致可定向超曲面, 若 P^2R 为非零常数, 则只有 $P^2R = n(n-1)$, 且 M 必为超球面

2 基本公式

设 M 是 n 维黎曼流形, R^{n+p} 是 $n+p$ 维欧氏空间 $\varphi: M \to R^{n+p}$ 是一个等距浸入. 记 x 是 R^{n+p} 中的位置矢量, $\varphi(q) = r(q \in M)$ 是 M 在 R^{n+p} 中的位置矢量. 为方便, 以下所述 M, 均指 $\varphi(M)$.

取 $e_1, e_2, \cdots, e_{n+p}$ 是 R^{n+p} 中的单位正交标架场, 并且限制到 M 上, $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 是 M 的单位正交标架场, 它们的对偶标架场分别设为 $\{\omega_A\}$ 与 $\{\omega_i\}$. 指标的取值范围约定如下:

$1 \le A, B, C \cdots \le n+p$; $1 \le i, j, k, \cdots \le n$; $n+1 \le \alpha, \beta, \gamma, \cdots \le n+p$. 那么 R^{n+p} 的结构方程为

$$dx = \sum \omega_A e_A, \quad de_A = -\sum \omega_{AB} e_B, \ \omega_{AB} + \omega_{BA} = 0,$$

$$d\omega_A = -\sum \omega_{AB} \wedge \omega_B, \quad d\omega_{AB} = -\sum \omega_{AC} \wedge \omega_{CB}.$$

限制到 M 上, $\omega_{\alpha i} = 0$.

设 $\omega_{\alpha i} = \sum h_{ij}^{\alpha}\omega_j$, 记 $H^{\alpha} = \frac{1}{n}\sum h_{ii}^{\alpha}$, $H = \sum H^{\alpha} e_{\alpha}$, 则 M 的结构方程为

$$d\omega_i = -\sum \omega_j \wedge \omega_{ji},$$

$$d\omega_{ji} = -\sum \omega_{jk} \wedge \omega_{ki} + \frac{1}{2}\sum R_{ijkl}\omega_k \wedge \omega_l, \quad R_{ijkl} = \sum (h_{ik}^{\alpha}h_{jl}^{\alpha} - h_{il}^{\alpha}h_{jk}^{\alpha}).$$

对于 R^{n+p} 中的位置矢量 x, 有

$$0 = \sum x_{iA}\omega_A = dx_i - \sum x_j\omega_{ji} - \sum \omega_{\alpha i} e_{\alpha} (\text{对 } \forall i),$$

限制到 M 上, 得

$$0 = dr_i - \sum r_j\omega_{ji} - \sum h_{ij}^{\alpha} e_{\alpha}\omega_j = \sum (r_{ij} - \sum h_{ij}^{\alpha} e_{\alpha})\omega_j \ (\text{其中 } r_{ij} \equiv dr_i - \sum r_j\omega_{ji}),$$

故

$$r_{ij} = \sum h_{ij}^{\alpha} e_{\alpha} \tag{1}$$

令 $r = \sum z_i e_i + \sum P_{\alpha} e_{\alpha}$, 记 $\underline{P} = \sum P_{\alpha} e_{\alpha}$, $f = \langle r, r\rangle$, ($\langle , \rangle$ 为 R^{n+p} 的内积). 则

$$f_i = 2\langle r, e_i\rangle,$$

$$\frac{1}{2}f_{ij} = \langle e_j, e_i\rangle + \langle r, r_{ij}\rangle = \delta_{ij} + \langle \sum z_k e_k + \sum P_{\alpha} e_{\alpha}, \sum h_{ij}^{\alpha} e_{\alpha}\rangle = \delta_{ij} + \sum p_{\alpha} h_{ij}^{\alpha}.$$

从而有下面的引理

引理1 设 M 是 R^{n+p} 中的浸入子流形, 那么

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

$$\frac{1}{2}f_{ij} = \sum P_\alpha h_{ij}^\alpha + \delta_{ij}. \tag{2}$$

在(2)中, 令 $i = j$ 求和, 得到

$$\frac{1}{2}\Delta f = n\sum P_\alpha H^\alpha + n. \tag{3}$$

考虑 $|R^{n+1}$ 中超曲面, (2), (3)式分别变为

$$\frac{1}{2}f_{ij} = Ph_{ij} + \delta_{ij}, \tag{4}$$

$$\frac{1}{2}\Delta f = n(1 + PH). \tag{5}$$

对支撑函数 P 求共变导数, 得到

$$P_i = -\frac{1}{2}\sum h_{ij}f_j. \tag{6}$$

进而 $\Delta P = -\frac{n}{2}\sum H_i f_i - \frac{1}{2}\sum h_{ij}f_{ij}$, 结合(4)式, 得到

$$\Delta P = -\frac{n}{2}\sum H_i f_i - PS - nH. \tag{7}$$

引理2 对于 R^{n+1} 中紧致可定向超曲面, 有

$$\frac{1}{4}|\nabla f|^2 + P^2 - f = 0, \tag{8}$$

证明 由于 $f = \sum z_i^2 + \sum P_\alpha^2 = \sum z_i^2 + P^2$, 而 $z_i = \langle r, e_i\rangle = \frac{1}{2}f_i$, 所以 $\frac{1}{4}|\nabla f|^2 = \sum z_i^2$, 故

$$f = \sum z_i^2 + P^2 = \frac{1}{4}|\nabla f|^2 + P^2. \qquad \square$$

命题1 对于 R^{n+p} 中的子流形, 下面的公式成立

$$\frac{1}{4}\sum f_{ij}^2 - \Delta f + n = \sum \langle \underline{P}, r_{ij}\rangle^2, \tag{9}$$

$$\frac{1}{4n}(\Delta f)^2 - \Delta f + n = n\langle \underline{P}, H\rangle^2. \tag{10}$$

证明 (9), (10)两式由(1), (2), (3)直接得到

考虑 $|R^{n+1}$ 中的超曲面, (9), (10)两式分别变为

$$\frac{1}{4}\sum f_{ij}^2 - \Delta f + n = P^2 S, \tag{11}$$

$$\frac{1}{4n}(\Delta f)^2 - \Delta f + n = nP^2 H^2. \tag{12}$$

由(11), (12)式直接得到

命题2 对于 R^{n+1} 中的超曲面, 有

$$P^2 R = \frac{1}{4}(\Delta f)^2 - \frac{1}{4}\sum f_{ij}^2 - (n-1)\Delta f + n(n-1), \tag{13}$$

$$\sum f_{ij}^2 = \frac{1}{n}(\Delta f)^2 + 4P^2(S - nH^2). \tag{14}$$

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

3 定理的证明

定理1的证明 由(9)式

$$\frac{1}{4}\sum f_{ij}^2 = \sum \langle r_{ij}, \underset{\sim}{P}\rangle^2 - n + \Delta f \le \sum \|r_{ij}\|^2 |\underset{\sim}{P}|^2 - n + \Delta f = \underset{\sim}{P}^2 S - n + \Delta f,$$

即 $0 \le \frac{1}{4}\sum f_{ij}^2 \le \Delta f + \underset{\sim}{P}^2 S - n$. 当 $\underset{\sim}{P}^2 S \le n$ 时, $\Delta f \ge n - \underset{\sim}{P}^2 S \ge 0$. 由Hopf引理知, f 为常数, 且 $\underset{\sim}{P}^2 S \equiv n$, 因而$M$ 为球面. □

定理2的证明 直接计算 $\Delta|\nabla f|^2$ 有

$$\frac{1}{2}\Delta|\nabla f|^2 = \sum (f_i \Delta f)_i + \sum f_{ij}^2 - (\Delta f)^2 + \sum R_{ij} f_i f_j.$$

将(13)式代入, 得到

$$\frac{1}{2}\Delta|\nabla f|^2 - \sum (f_i \Delta f)_i = 4[n(n-1) - P^2 R] - 4(n-1)\Delta f + \sum R_{ij} f_i f_j.$$

在M 上积分, 并由定理条件, 知 $P^2 R \equiv n(n-1)$, 且 $R_{ij} f_i f_j = 0, \forall i, j$.

由于 $n(n-1) = P^2 R = n^2 P^2 H^2 - P^2 S \le n(n-1) P^2 H^2$, 即 $P^2 H^2 \ge 1$ 处处成立, 所以由 PH 的连续性, 知 $PH \ge 1$ 或 $PH \le -1$ 之一成立, 由(5)式和M 的紧致性, 知 f 为常数, 即M 为超球面. □

推论1的证明 由人们熟知的不等式 $\sum R_{ijkl}^2 \ge \frac{2R^2}{n(n-1)}$, 结合条件有 $(P^2 R)^2 \le \frac{n(n-1)}{2} P^4 \sum R_{ijkl}^2 \le n^2(n-1)^2$, 从而 $0 \le P^2 R \le n(n-1)$. 由定理2, 便知 $P^2 R \equiv n(n-1)$, M 是超球面, 从而 $P^4 \sum R_{ijkl}^2 \equiv 2n(n-1)$. □

推论2的证明 由 $\sum R_{ij}^2 \ge \frac{1}{n} R^2$, 结合条件, 有 $(P^2 R)^2 \le n P^4 \sum R_{ij}^2 \le n^2(n-1)^2$, 由定理2, 便得 $P^4 \sum R_{ij}^2 \equiv n(n-1)^2$, 且$M$ 是超球面.

定理3的证明 对 $P^2 S$ 求导, 有

$$P_i S = -\frac{1}{2} P S_i, \forall i. \tag{15}$$

对 i 求导后求和, 并将(7)式代入, 得到

$$\frac{1}{2} P^2 \Delta S = -\frac{3}{4}\sum (P^2)_i S_i + \frac{n P S}{2}\sum H_i f_i + S(P^2 S - n) + \frac{S}{2}\Delta f.$$

在 S 的最大值点 y, $S_i = 0$, 从而 $P_i = 0$, 由(6)式及M 的凸性, 知 $f_i = 0 (\forall i)$, 因而在 y 点

$$0 \ge \frac{1}{2} P^2 \Delta S = S(P^2 S - n) + \frac{S}{2}\Delta f. \tag{16}$$

若在 y 点, $\Delta f > 0$, 则 $P^2 S < n$; 若在 y 点, $\Delta f \le 0$, 将(11)式代入(16)式, 有

$$0 \ge \frac{1}{2} P^2 \Delta S = \frac{S}{4}\sum f_{ij}^2 - \frac{S}{2}\Delta f \ge 0.$$

因而 $f_{ij} = 0 (\forall, i, j)$. 由(11)式, 知 $P^2 S = n$.

综合这两种情形, 总有 $P^2 S \le n$. 由定理1, $P^2 S = n$, 且M 只能为超球面. □

定理4的证明 将(7)式变形为

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

$$\Delta P + \frac{n}{2}\sum (Hf_i)_i = \frac{n}{2}H\Delta f - PS - nH.$$

设 x_0 是使上式左端为零的点, 结合(5) 式, 可知在 x_0 点,

$$0 = \frac{n}{2}H\Delta f - PS - nH = PR + n(n-1)H,$$

乘 P 得

$$\frac{n-1}{2}\Delta f = n(n-1)P^2R. \tag{17}$$

将(14), (17)代入(13)式, 得到

$$P^2(S - nH^2) = \frac{-P^2R}{n(n-1)}[n(n-1) - P^2R].$$

由于 P^2R 为非零常数, M 紧致, 故 $P^2R > 0$. 因而, 在 x_0 点, $P^2R \geq n(n-1)$. 又由(12)式, 在 $\Delta f = 0$ 的点, $P^2R \leq n(n-1)$. 因而只有 $P^2R = n(n-1)$.

关于 M 是超球面的证明, 与定理2的证明相同. □

参 考 文 献

[1] Chern S S. *Minimal submanifolds in a riemannian manifold* [C]. Mimeographed Lecture Notes, Univ. of Kasas, 1968.

[2] Chern S S, Do Carmo M and Kobayashi S. *Minimal submanifolds of a sphere with second fundamental form of constant length* [C]. Chern Shiingshen Selected Papers, 393-404.

[3] Yau S T. *Submanifolds with constant mean curvature* [J]. Amer. Jour. of Math., **96**(2): 346-366.

The Pinching Phenomenon of Submanifold in Euclidean Space

Li Qi *Chen Jianhua*

(Jinzhou Teachers' College, Liaoning 121003)

Abstract

In this paper, we study the Pinching phenomenon of compact submanifold in Euclidean space, obtain some formulas, and derive Pinching theorem of some geometric quantities.

Keywords submanifold, support function, Pinching.

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.