球面2型超曲面*

张远征
(浙江教育学院数学系, 杭州310012)

摘　要: 本文在无先念条件下, 证明了Chen[1]关于2型超曲面的一个定理.

关键词: 球面, 超曲面
分类号: AMS(1991) 53C45/CLC O186.16
文献标识码: A　　**文章编号**: 1000-341X(1999)增刊-0222-03

设$S^{n+1}\subset E^{n+2}$为中心在原点的单位超球面, M^n为其连通的超曲面并赋予诱导度量. Δ表示M^n的拉普拉斯算子, 自然地, Δ可作用到M^n的E^{n+2}值光滑映照上, 若位置向量x有下述分解:

$$x=x_0+x_1+x_2,\ \Delta x_i=\lambda_i x_i,\ \lambda_1\neq\lambda_2,\ i=1,2, \tag{1}$$

其中x_0为常向量, λ_1, λ_2为非零常数, 则称M为S^{n+1}的2型超曲面.

Chen[1]证明了质量对称($x_0=0$)的紧致超曲面M^n是2型的充要条件为M^n具有常平均曲率$\alpha\neq0$和常纯量曲率. 特别$n=2$时, Barros和Gray[2]去掉了质量对称条件; Hasanis和Vlachos[3]进一步去掉了紧致性条件.

本文在无先念条件下将[2, 3]的工作推广到$n\geq3$. 具体证明了

定理　设M^n为S^{n+1}的超曲面, 且不是小超球面, 则M^n为2型当且仅当具有常平均曲率$\alpha\neq0$和常纯量曲率.

证明　取S^{n+1}的局部正交标架$E_1,\cdots,E_n,N$使$E_1,\cdots,E_n$切于M^n. 用$\bar\nabla$和∇分别表示E^{n+2}和M^n的黎曼联络, 则Δ可表为

$$\Delta\upsilon=\sum_{i=1}^{n}(\bar\nabla_{E_i}\bar\nabla_{E_i}\upsilon-\bar\nabla_{\nabla_{E_i}E_i}\upsilon), \tag{2}$$

其中υ是E^{n+2}值光滑映射.

现设M^n是2型的, 将M^n在S^{n+1}中的平均曲率向量H写作$H=\alpha N$. 由于$\Delta x=-nx+nH$, 利用(1)得

$$-nx+nH=\lambda_1x_1+\lambda_2x_2, \tag{3}$$

$$n^2(x-H)+n\Delta H=\lambda_1^2x_1+\lambda_2^2x_2, \tag{4}$$

由(1), (3)和(4)消去x_1, x_2,

* 收稿日期: 1996-01-08
作者简介: 张远征(1966-), 男, 浙江浦江人, 硕士, 浙江教育学院副教授.

$$\Delta H = a\alpha N + bx + Q, \tag{5}$$

其中 a, b 是实数, Q 为常向量

另一方面, 利用(2)直接计算有

$$\Delta H = (\Delta\alpha - \alpha s)N - (2A\,\mathrm{grad}\alpha + n\alpha\,\mathrm{grad}\alpha) + n\alpha^2 x, \tag{6}$$

其中 A 是Weingarten映照, S 是第二基本形式的长度 比较(5)和(6),

$$Q^{TM} = -(2A\,\mathrm{grad}\alpha + n\alpha\,\mathrm{grad}\alpha), \tag{7}$$

$$\langle Q, x\rangle = n\alpha^2 - b, \tag{8}$$

$$\langle Q, N\rangle = \Delta\alpha - \alpha s - a\alpha, \tag{9}$$

其中 $\langle , \rangle$ 表 E^{n+2} 的通常内积

对(8)作用梯度运算 grad, $Q^{TM} = 2n\alpha\,\mathrm{grad}\alpha$, 与(7)比较,

$$A\,\mathrm{grad}\alpha = -\frac{3n}{2}\alpha\,\mathrm{grad}\alpha \tag{10}$$

因此 Q 可表示为

$$Q = 2n\alpha\,\mathrm{grad}\alpha + (\Delta\alpha - \alpha s - a\alpha)N + (n\alpha^2 - b)x. \tag{11}$$

利用 S^{n+1} 在 E^{n+1} 中, M^n 在 S^{n+1} 中的高斯公式, 从上式计算

$$0 = dQ(E_i) = \bar{\nabla}_{E_i}Q = -3n^2\alpha^2\langle\mathrm{grad}\alpha, E_i\rangle N + 2n\nabla_{E_i}(\alpha\,\mathrm{grad}\alpha) +$$

$$E_i(\Delta\alpha - \alpha s - a\alpha)N - (\Delta\alpha - \alpha s - a\alpha)AE_i + (n\alpha^2 - b)E_i,$$

考虑切分量和法分量,

$$2n\nabla_{E_i}(\alpha\,\mathrm{grad}\alpha) - (\Delta\alpha - \alpha s - a\alpha)AE_i + (n\alpha^2 - b)E_i = 0, \tag{12}$$

$$-3n^2\alpha^2\langle\mathrm{grad}\alpha, E_i\rangle + E_i(\Delta\alpha - \alpha s - a\alpha) = 0, \tag{13}$$

显然, (13)意味着 $\mathrm{grad}(\Delta\alpha - \alpha s - a\alpha - n^2\alpha^3) = 0$, 因此存在常数 c, 使

$$\Delta\alpha - \alpha s - a\alpha = n^2\alpha^3 + c. \tag{14}$$

又将(2)作用到(8)和(9), 利用(11)和(14)及高斯公式, 直接计算不难得到

$$n\Delta\alpha^2 = -n(n\alpha^2 - b) + n\alpha(n^2\alpha^3 + c), \tag{15}$$

$$n^2\Delta\alpha^3 = n\alpha(n\alpha^2 - b) - s(n^2\alpha^3 + c) - 2n^2\alpha|\mathrm{grad}\alpha|^2, \tag{16}$$

联合(14), (15)和 $\Delta\alpha^2 = 2\alpha\Delta\alpha + 2|\mathrm{grad}\alpha|^2$,

$$2n\alpha^2 s + 2n|\mathrm{grad}\alpha|^2 = -n\alpha(n^2\alpha^3 + c) - n(n\alpha^2 - b) - 2na\alpha^2. \tag{17}$$

同样, 联合(14), (16)和 $\Delta\alpha^3 = 3\alpha^2\Delta\alpha + 6\alpha|\mathrm{grad}\alpha|^2$,

$$(4n\alpha^3 + c)s + 8n^2\alpha|\mathrm{grad}\alpha|^2 = -3n^2\alpha^2(n^2\alpha^3 + c) + n\alpha(n\alpha^2 - b) - 3an^2\alpha^3. \tag{18}$$

从(17)和(18)消去 s,

$$2n(4n^2\alpha^3 - c)|\mathrm{grad}\alpha|^2 = -2n^5\alpha^7 + 2(1 + 2n + a)n^3\alpha^5 - 2cn^3\alpha^4 - (2 + 4n)n^2b\alpha^3 + (n^2 + 2na)c\alpha^2 + c^2n\alpha - nbc. \tag{19}$$

另外, 从(11)直接得

$$\langle Q, Q\rangle = 4n^2\alpha^2|\mathrm{grad}\alpha|^2 + (n^2\alpha^3 + c)^2 + (n\alpha^2 - b)^2. \tag{20}$$

从(19)和(20)再消去 $|\mathrm{grad}\alpha|$,

$$(a + 2n + 2)\alpha^7 + c\alpha^6 - \left(\frac{3}{n} + 2\right)b\alpha^5 + p_4(\alpha) = 0 \tag{21}$$

其中 $p_4(\alpha)$ 是4阶多项式 考虑以下情况:

(i) $(a, b, c) = (-2n-2, 0, 0)$. 此时从(19)导致$4|\mathrm{grad}\alpha|^2 = -(n^2\alpha^4 + \alpha^2) \leq 0$, 故$\alpha = 0$. 据Takahashi定理[4], M^n是1型的, 矛盾.

(ii) $(a, b, c) \neq (-2n-2, 0, 0)$. 因此(21)至少是一个5阶多项式, 故$\alpha$为常数($\neq 0$). 从(14)进一步导出$S$也为常数, 故具有常纯量曲率. 必要性证毕. 充分性仅需直接验算.

参 考 文 献

[1] Chen B Y. *Total Mean Curvature and Submanifolds of Finite Type* [M]. World Scientific, Singapore and New Jersey, 1984.

[2] Barros and Garay O. *2-type surfaces in S^3* [J]. Geometriae Dedicata, 1987, **24**: 329-336.

[3] Hasanis H and Vlachos Th. *A local classification of 2-type surfaces in S^3*. Proc. Amer. Math. Soc., 1991, **112**: 533-538.

[4] Takahash T. *Minimal immersions of Riemannian manifolds* [J]. J. Math. Soc. Japan, 1966, **18**: 380-385.

Spherical 2-Type Hypersurfaces

Zhang Yuanzheng

(Dept. of Math., Zhejiang College of Education, 310012)

Abstract

A Chen's Theorem about spherical 2-type hypersurfaces is proved without any other conditions.

Keywords sphere, hypersurfaces