非线性多值算子扰动的映射定理*

王为民 赵义纯
(浙江工业大学基础部, 杭州310014) (东北大学数学系, 沈阳110006)

摘 要: 本文讨论非线性多值算子的非紧扰动的映射定理, 并给出非线性泛函方程

$$z\in T(x)+F(x)$$

可解性的最新结果, 其中 T 是多值算子且 $(T+\frac{1}{n}I)^{-1}$是1-集压缩, 而 F 是1-集压缩或 γ-凝聚. 所得的结果改善了[5, 8, 12]中的主要结果.

关键词: 1-集压缩算子, γ-凝聚算子, m-增生算子.
分类号: AMS(1991) 47H10/CLC O177.91
文献标识码: A **文章编号**: 1000-341X(1999)增刊-0225-05

设 X 是实Banach 空间, X^* 是它的共轭空间. 用 $B(x,r)$ 表示以 $x\in X$ 为中心, 以 r 为半径的开球. 用 $\overline{\Omega}$ 和 $\partial\Omega$ 分别表示 X 的子集 Ω 的闭包和边界.

设 γ是 Kuratowski 或球非紧度量, 连续算子 $F:D(F)\subset X\to X$ 称为 γ-压缩的是指对所有有界集 $B\subset D(F)$, 存在常数 $k(0\le k\le 1)$ 使得 $\gamma(FB)\le k\gamma(B)$. 若 $k<1$, 则称 F 是严格 γ-压缩的; 若 $k=1$, 则称 F 是1-集压缩的. 连续算子 F 称为 γ-凝聚的是指对任何有界集 $B\subset D(F)$ 且 $\gamma(B)>0$, 都有不等式 $\gamma(FB)<\gamma(B)$ 成立.

多值算子 $T:D(T)\subset X\to 2^X$ 叫做强增生的是指对任何 $x,y\in D(T)$, $u\in T(x)$, $v\in T(y)$, 存在 $j\in J(x-y)$ 使得

$$\langle u-v,j\rangle\ge C\|x-y\|^2, \tag{1}$$

其中 C 是与 x,y 无关的正数, $J:X\to 2^{X^*}$ 是正规对偶映射

$$Jx=\{j\in X^*:\langle x,j\rangle=\|x\|^2=\|j\|^2\},$$

$\langle\cdot,\cdot\rangle$表示 X 与 X^* 之间的广义对偶对. 如果不等式(1)对 $C=0$的情形成立, 那么 T 叫做增生算子. 增生算子 T 称为 m-增生的是指对所有 $\lambda>0$, $\lambda T+I$ 是到 X 上的满射, 即 $R(\lambda T+I)=X$, 其中 I 是恒等算子. 对于多值算子 T, 记 $|T(x)|=\inf\{\|y\|: y\in T(x)\}$.

以上概念参看文献[3].

最近, Kartsatos[6-9], Hirano[5], Morales[12], Chen[2], He[4]和Liu[11]等人研究了 m-增生算子被紧算子或1-集压缩算子扰动的值域问题. 这一方向的研究是与半线性发展方程和积微分方程密切相联的. 但是, 必须指出: 如果 T 是 m-增生算子, 对 $\lambda>0$, $(T+\lambda I)^{-1}$不一定是非扩张

* **收稿日期**: 1995-03-28
作者简介: 王为民(1960-), 男, 江苏泰州人, 硕士, 浙江工业大学副教授.

的 本文的目的是给出非线性泛函方程

$$z \in T(x) + F(x) \tag{2}$$

可解性的一些新结果, 其中 T 是多值算子, $(T+\frac{1}{n}I)^{-1}$是1-集压缩, 而 F 是1-集压缩或 γ-凝聚 结果改善或推广了[5, 8, 12]中的一些结果

定理1 设 X 是Banach 空间, $T: D(T) \subset X \to 2^X$ 是多值算子且$(T+\frac{1}{n}I)^{-1}: X \to D(T)$是1-集压缩; $F: D(T) \to X$ 是1-集压缩算子. 假设存在正数 a, b 使得对任何 $x \in D(T)$ 且$\|x\| \geq b$, 有

$$a\|x\| + \|F(x)\| \leq |T(x) + F(x)|, \tag{3}$$

则 $T+F$ 的值域在 X 中稠密

证明 设 $z \in X$, 选择 $n_0 \in \mathbf{N}$ 使得当 $n \geq n_0$时, $\frac{1}{n} < a$. 定义算子$A_n: X \to X$, $A_n(x) = z - (1-\frac{1}{n})F(T+\frac{1}{n}I)^{-1}(x)$ $(n \geq n_0)$. 可以证明A_n 有不动点, 为此只需证明集合

$$E(n) = \{x \in X: \lambda x = A_n(x), \lambda > 1\}$$

是有界的 对任意 $x \in E(n)$, 有 $\lambda > 1$使得

$$\lambda x = z - (1-\frac{1}{n})F(T+\frac{1}{n}I)^{-1}(x).$$

取 $b_1 \geq b$ 且$(a-\frac{1}{n_0})b_1 > \|z\|$ 令 $y = (T+\frac{1}{n}I)^{-1}(x)$, 则可得$\|y\| < b_1$. 事实上, 若不然, 即$\|y\| \geq b_1$, 则存在 $u \in T(y)$使得

$$\begin{aligned}\|z\| &\geq \lambda^{-1}\|z\| = \|u + \frac{1}{n}y + (1-\frac{1}{n})\lambda^{-1}F(y)\| \\ &= \|u + F(y) + \frac{1}{n}y - [1-(1-\frac{1}{n})\lambda^{-1}]F(y)\| \\ &\geq \|u + F(y)\| - [1-(1-\frac{1}{n})\lambda^{-1}]\|F(y)\| - \frac{1}{n}\|y\| \\ &\geq a\|y\| - \frac{1}{n}\|y\| \geq (a-\frac{1}{n})b_1,\end{aligned}$$

矛盾 因为 F 是1-集压缩, 所以 $F\{B(0, b_1)\}$是有界的, 设其界为M, 则对所有 $x \in E(n)$, 有

$$\|x\| \leq \lambda\|x\| \leq \|z\| + (1-\frac{1}{n})\|F(y)\| \leq \|z\| + M.$$

显然$A_n(n \geq n_0)$是 γ-凝聚映射, 于是A_n 有不动点 x_n, 即 $x_n = A_n x_n$. 令 $y_n = (T+\frac{1}{n}I)^{-1}(x_n)$, $u_n \in T(y_n)$, $z = u_n + \frac{1}{n}y_n + (1-\frac{1}{n})F(y_n)$, 则

$$\|u_n + F(y_n) - z\| \leq \frac{1}{n}(\|y_n\| + \|F(y_n)\|),$$

由于$\|y_n\| < b_1$, $\|F(y_n)\| \leq M$, 故

$$\|u_n + F(y_n) - z\| \to 0 \quad (n \to \infty).$$

定理2 设 X, T 和 F 如同定理1所设 假设存在正数 a, b 使得对任何 $x \in D(T)$, $\|x\| \geq b$, 条件(3)成立 又设$(T+F)\{\overline{B}(0, b) \cap D(T)\}$是闭集, 则$B(0, ab) \subset R(T+F)$.

证明 设 $z \in X$ 且$\|z\| < ab$, 则选取 $n_0 \in \mathbf{N}$, 使得$(a-\frac{1}{n_0})b > \|z\|$ 对于 $n \geq n_0$, 定义算子

$$A_n(x) = z - (1-\frac{1}{n})F(T+\frac{1}{n}I)^{-1}(x),$$

如同在定理1中的证明,可得A_n有不动点x_n.令$y_n = (T+\frac{1}{n}I)^{-1}(x_n)$,选择$u_n \in T(y_n)$.同样,可证明对所有$n \geq n_0$,$\|y_n\| < b$.因此,

$$u_n + F(y_n) \in (T+F)\{\overline{B}(0,b) \cap D(T)\}$$

$$\|u_n + F(y_n) - z\| = \frac{1}{n}\|y_n + F(y_n)\| \to 0 \quad (n \to \infty),$$

即有$z \in R(T+F)$.

评注1　与[12]中定理1和定理2比较,虽然结果中算子T的条件较强,但是,算子F被放松到1-集压缩.还要指出:当T是m-增生且是强增生时,对所有$n \in \mathbf{N}$,

$$(T+\frac{1}{n}I)^{-1}: X \to D(T)$$

都是1-集压缩的.

下面考虑算子T和F都是奇的情形.

定理3　设X是Banach空间,$D(T)$是X的关于原点对称的子集,$T: D(T) \to 2^X$是奇的多值算子且对所有$n \in \mathbf{N}$,$(T+\frac{1}{n}I)^{-1}: X \to D(T)$是1-集压缩.设$F: D(T) \to X$是奇的$\gamma$-凝聚算子.假设存在正数$a, b$使得对所有$x \in D(T)$且$\|x\| \geq b$,有

$$a\|x\| \leq |T(x) + F(x)|.$$

如果$(T+F)\{\overline{B}(0,b) \cap D(T)\}$是闭集,则$B(0, ab) \subset R(T+F)$.

证明　设$z \in X$且$\|z\| < ab$,取$n_0 \in \mathbf{N}$使得$\frac{1}{n} < a$,$(a-\frac{1}{n})b > \|z\|$ $(n \geq n_0)$.定义算子H_n: $[0,1] \times X \to X$, $H_n(t,x) = tz - F(T+\frac{1}{n}I)^{-1}(x)$.设

$$E(n) = \{x \in X: x = H_n(t,x), 0 \leq t \leq 1\},$$

则$E(n)$是有界的,事实上,对每个$x \in E(n)$,存在某个$0 \leq t \leq 1$使得$x = tz - F(T+\frac{1}{n}I)^{-1}(x)$.令$y = (T+\frac{1}{n}I)^{-1}(x)$,可断言$\|y\| < b$.若不然,存在$u \in T(y)$使得

$$\begin{aligned}\|z\| \geq t\|z\| &= \|u + F(y) + \frac{1}{n}y\| \geq \|u + F(y)\| - \frac{1}{n}\|y\| \\ &\geq a\|y\| - \frac{1}{n}\|y\| \geq (a-\frac{1}{n})b,\end{aligned}$$

矛盾.因为F是γ-凝聚,所以$F\{B(0,b)\}$是有界的,设M为其上界,则对所有$x \in E(n)$,有

$$\|x\| \leq t\|z\| + \|F(y)\| \leq \|z\| + M.$$

这样,存在正数r使得对所有$x \in \partial B(0,r)$和$0 \leq t \leq 1$,有$x \neq H_n(t,x)$.下面证明对所有有界集$B \subset X$, $\gamma\{H_n([0,1] \times B)\} < \gamma(B)$.设$H_n^{(1)}(t,x) = tz$, $H_n^{(2)}(t,x) = -F(T+\frac{1}{n}I)^{-1}(x)$,则

$$H_n([0,1] \times B) \subset H_n^{(1)}([0,1] \times B) + H_n^{(2)}([0,1] \times B),$$

$$\gamma(H_n([0,1] \times B)) \leq \gamma(H_n^{(1)}([0,1] \times B)) + \gamma(H_n^{(2)}([0,1] \times B)).$$

显然,$\gamma(H_n^{(1)}([0,1] \times B)) = 0$, $\gamma(H_n^{(2)}([0,1] \times B)) < \gamma(B)$.因此,据拓扑度的同伦不变性得

$$D(I - H_n(0,\cdot), B(0,r), 0) = D(I - H_n(1,\cdot), B(0,r), 0).$$

因为 $H_n(0,\cdot)$ 是奇的, 所以由 Borsuk's 定理知 $D(I-H_n(1,\cdot),B(0,r),0)\neq 0$, 于是对 $n\geq n_0$, 存在 x_n 使得 $x_n=H_n(1,x_n)$, 即 $x_n=z-F(T+\frac{1}{n}I)^{-1}(x_n)$. 因此, 如同定理2的证明, 得到 $z\in R(T+F)$.

评注2　与[5]中定理5比较, 加强了算子 T 的条件, 但是其它条件是相当弱的

算子 $T:D(T)\subset X\to 2^X$ 叫做吸收的是指若 $x\in D(T)$, 则对每一 $t\in(0,1)$, 有 $tx\in D(T)$.

下面的定理4改善了[8]中的定理4

定理4　设 X 是 Banach 空间, $T:D(T)\subset X\to 2^X$ 是吸收的 m-增生算子且对所有 $n\in\mathbf{N}$, $(T+\frac{1}{n}I)^{-1}$ 是1-集压缩 又设 $F:X\to X$ 是 γ-凝聚 假设存在正数 b,r 使得对每一 $x\in D(T)$, $\|x\|\geq b$ 存在 $j\in J(x)$ 满足

$$r\|x\|\leq\langle u+F(x),j\rangle,$$

其中 $u\in T(x)$. 如果 $(T+F)(\overline{B}(0,b)\cap D(T))$ 是闭集, 则 $\overline{B}(0,r)\subset R(T+F)$.

证明　设 $z\in X$, $\|z\|\leq r$, 定义 $A_n:X\to X$, $A_n(x)=(T+\frac{1}{n}I)^{-1}(z-F(x))$. 令

$$E(n)=\{x\in X:\lambda x=A_n(x),\lambda>1\},$$

则 $E(n)\subset B(0,b)$. 若不然, 则有 $x\in E(n)$, $\|x\|\geq b$ 且存在 $\lambda>1$ 使得 $\lambda x=(T+\frac{1}{n}I)^{-1}(z-F(x))$. 进而有 $u\in T(x)$, $v_\lambda\in T(\lambda x)$ 使得 $z=v_\lambda-u+u+F(x)+\frac{\lambda}{n}x$. 于是, 存在 $j\in J(x)$ 满足

$$\langle v_\lambda-u,j\rangle+\langle u+F(x),j\rangle+\frac{\lambda}{n}\|x\|^2\leq\|z\|\|x\|,$$

$$r\|x\|+\frac{\lambda}{n}\|x\|^2\leq\|z\|\|x\|,$$

$$r<r+\frac{\lambda}{n}\|x\|\leq\|z\|,$$

矛盾! 显然, A_n 是 γ-凝聚 于是, A_n 有不动点 x_n. 进而存在 $u_n\in T(x_n)$ 使得

$$u_n+F(x_n)+\frac{1}{n}x_n=z.$$

假设 $\|x_n\|\geq b$, 则存在 $j\in J(x_n)$ 使得

$$\langle u_n+F(x_n)+\frac{1}{n}x_n,j\rangle=\langle z,j\rangle,\quad r\|x_n\|+\frac{1}{n}\|x_n\|^2\leq\|z\|\|x_n\|,$$

矛盾! 因此, $\{x_n\}\subset B(0,b)$, 进而当 $n\to\infty$ 时 $\|u_n+F(x_n)-z\|=\frac{1}{n}\|x_n\|\to 0$, 即 $z\in R(T+F)$.

参 考 文 献

[1] Browder F E. *Nonlinear operators and nonlinear equations of evolution in Banach space* [J]. Proc Symp. Pure Math., **18**, AMS (1976).

[2] Chen Y Z. *The generalized degree for compact perturbations of m-accretive operators and applications* [J]. Nonlinear Anal, 1989, **13**: 393-403.

[3] Deimling K. *Nonlinear Functional Analysis* [M]. Springer-Verlag, 1985.

[4] He Z. *Some mapping theorems involving the perturbations of m-accretive operators* [J]. Nonlinear

Anal., 1992, **19**: 345- 351.
[5] Hirano N. *Some surjectivity theorems for compact perturbations of accretive operators* [J]. Nonlinear Anal., 1984, **8**: 765- 774.
[6] Kartsatos A G. *Surjectivity results for compact perturbations of m-accretive operators* [J]. J. Math. Anal. Appl., 1980, **78**: 1- 16.
[7] Kartsatos A G. *Mapping theorems involving compact perturbation and compact resolvents of nonlinear operators in Banach space* [J]. J. Math. Anal. Appl., 1981, **80**: 130- 146.
[8] Kartsatos A G. *On the solvability of abstract operator equations involving compact perturbations of m-accretive operators* [J]. Nonlinear Anal., 1987, **11**: 997- 1004.
[9] Kartsatos A G. *Recent results involving compact perturbations and compact resolvents of accretive operators in Banach spaces* [J]. Proc. of WCNA, to appear.
[10] Kato T. *Nonlinear semigroups and evolution equations* [J]. J. Math. Soc. Japan, 1967, **19**: 508- 520.
[11] Liu N G. *The generalized degree for* 1-*set contraction mapping perturbation of m-accretive operator and applications* [J]. Nonlinear Anal., 1992, **18**: 605- 618.
[12] Morales C. *Remarks on compact perturbations of m-accretive operators* [J]. Nonlinear Anal., 1991, **16**: 771- 780.

Mapping Theorems Involving Perturbations of Nonlinear Multivalued Operators

Wang Weimin
(Dept. of Basic Courses, Zhejiang Univ. of Tech., Hangzhou 310014)

Zhao Yichun
(Dept. of Math., Northeastern Univ., Shenyang 110006)

Abstract

It is the purpose of this paper to discuss mapping theorems involving non-compact perturbations of nonlinear multivalued operators. We give some recent results concerning the solvability of the nonlinear functional equation

$$z \in T(x) + F(x),$$

where T is a multivalued operator such that $(T + \frac{1}{n} I)^{-1}$ are 1-set contractions and F is an 1-set contraction or a γ-condensing. Our results improve the main results in [5, 8, 12].

Keywords 1-set contraction operator, γ-condesing operators, m-accretive operator.