第19卷 增刊 数学研究与评论 Vol. 19 Supp
1999年4月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Apr. 1999

# 关于二次 Putnam-Fuglede 定理(Ⅰ)*

陈 寅
(河海大学数理系, 南京210024)

**摘 要**: 设$N$为正规算子, 若$N$与交换子$NX-XN$可交换, 则$N$必与$X$可交换, 称此结论为二次 Putnam-Fuglede 定理. 本文给出了在幂零算子扰动下及在一些非正常算子时的二次 PF 定理.

**关键词**: 正规算子, 广义导算子, 幂零算子, 二次 Putnam-Fuglede 定理
**分类号**: AMS(1991) 47B47/CLC O177.1
**文献标识码**: A **文章编号**: 1000-341X(1999)增刊-0241-05

## 1 引 言

设$H$是一复 Hilbert 空间, $B(H)$为$H$上线性有界算子全体. 对$A, B \in B(H)$, 记$\delta_{AB}$为$B(H)$上的广义导算子: $\delta_{AB}(X) = AX - XB$, $X \in B(H)$.

又记$\delta_{AB}^{(n)}(X) = \delta_{AB}(\delta_{AB}^{(n-1)}(X))$, $n \geq 2$.

在[1]中, C. R. Putnam 讨论了正规算子, 得到了如下著名论断, 称之为二次 Putnam-Fuglede 定理:

**定理A** 设$N$正规, $X \in B(H)$, 如$N(NX - XN) = (NX - XN)N$, 则

$$NX - XN = 0.$$

利用 Putnam 技巧, [2]将二次 Putnam-Fuglede 定理写成如下形式

**定理B** 设$N, M$正规算子, $X \in B(H)$, 如$N(NX - XM) = (NX - XM)M$, 则

$$NX - XM = 0.$$

这表明$N, M$为正规算子时, $\ker\delta_{NM}^{(n)} = \ker\delta_{NM}$, $n \geq 2$.

为简单起见, 称算子对$(A, B)$有(SPFA), 如果$\ker\delta_{AB}^{(n)} = \ker\delta_{AB}$, $n = 2, 3, \cdots$.

## 2 幂零算子扰动下的二次 PF 定理

**定理2.1** 设$N, M$为正规算子, $C, D$为分别与$N, M$可交换的幂零算子, 则$(N + C, M + D)$有(SPFA)的充要条件为$\ker\delta_{NM} \subset \ker\delta_{CD}$.

**证明** 设$X \in \ker\delta_{N+C,M+D}^{(2)}$, 则$(N + C)\delta_{N+C,M+D}(X) = \delta_{N+C,M+D}(X)(M + D)$. 因$N, M$

* **收稿日期**: 1995-10-04

正规,$C,D$ 幂零且分别与 $N,M$ 可交换,由[3]或[4,定理4.22]知,$N\delta_{N+C,M+D}(X)=\delta_{N+C,M+D}(X)M$,将此式化成 $(N+C)\delta_{NM}(X)=\delta_{NM}(X)(M+D)$,再由[3]或[4]中结论,$N\delta_{NM}(X)=\delta_{NM}(X)M$,即 $\delta_{NM}^{(2)}(X)=0$.由定理B知,$\delta_{NM}(X)=0$.

如果 $\ker\delta_{NM}\subset\ker\delta_{CD}$ 成立,则对任取的 $X\in\ker\delta^{(2)}_{N+C,M+D}$ 由上面的讨论知,$\delta_{NM}(X)=0$,故 $\delta_{CD}(X)=0$,$\delta_{N+C,M+D}(X)=\delta_{NM}(X)+\delta_{CD}(X)=0$.即 $X\in\ker\delta_{N+C,M+D}$.故这时 $(N+C,M+D)$ 有(SPFA).

反之,如 $\ker\delta^{(n)}_{N+C,M+D}=\ker\delta_{N+C,M+D}$.而 $\ker\delta_{NM}\subset\ker\delta_{CD}$ 不能成立,则有 $X_0\in\ker\delta_{NM}$,但 $X_0\notin\ker\delta_{CD}$.因此这时 $\delta_{N+C,M+D}(X_0)=\delta_{NM}(X_0)+\delta_{CD}(X_0)=\delta_{CD}(X_0)\neq0$,而 $\delta^{(2)}_{N+C,M+D}(X_0)=\delta_{N+C,M+D}(\delta_{CD}(X_0))=\delta_{CD}(\delta_{N+C,M+D}(X_0))=\delta^{(2)}_{CD}(X_0)$,$\delta^{(3)}_{N+C,M+D}(X_0)=\delta^{(3)}_{CD}(X_0)$,$\cdots$,$\delta^{(n)}_{N+C,M+D}(X_0)=\delta^{(n)}_{CD}(X_0)$.容易算得 $\delta^{(n)}_{CD}(X_0)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k c_n^k C^{n-k}X_0D^k$.因 $C,D$ 幂零算子,故必有正整数 $k_0$,使 $C^{k_0}=0$,$D^{k_0}=0$.现设 $n=2k_0+1$,则 $n-k$ 和 $k$ 中至少有一个大于等于 $k_0$.故 $C^{n-k}$ 和 $D^k$ 对每个 $k=0,1,2,\cdots,n$ 至少有一个为0.故 $\delta^{(2k_0+1)}_{CD}(X_0)=0$.因此 $\delta^{(2k_0+1)}_{N+C,M+D}(X_0)=0$.由假设 $(N+C,M+D)$ 有(SPFA).故 $\delta_{N+C,M+D}(X_0)=0$.这与前面事实矛盾.故必须 $\ker\delta_{NM}\subset\ker\delta_{CD}$.

**推论2.2** 设 $C,D$ 为不全为零的幂零算子,$\lambda,\mu$ 为二个复数,则 $(\lambda I+C,\mu I+D)$ 有(SPFA)的充要条件为 $\lambda\neq\mu$,这里 $I$ 为 $B(H)$ 中单位算子.

**证明** 这里 $N=\lambda I$,$M=\mu I$,$NX-XN=(\lambda-\mu)I$.如 $\lambda\neq\mu$,则 $\ker\delta_{NM}=\{0\}$,自然 $\ker\delta_{NM}\subset\ker\delta_{CD}$.故 $(\lambda I+C,\mu I+D)$ 有(SPFA).反之,如 $\lambda=\mu$,则 $\ker\delta_{NM}=B(H)$.而 $C,D$ 不全为零,显然 $\ker\delta_{CD}\neq B(H)$.故 $\ker\delta_{NM}\not\subset\ker\delta_{CD}$,故由定理2.1,

$$\ker\delta^{(n)}_{N+C,M+D}\neq\ker\delta_{N+C,M+D},\ n=2,3,\cdots.$$

由于[3]和[4]中结论对拟幂零算子仍然成立,所以从定理2.1的证明中可以看出

**定理2.3** 设 $N,M$ 为正规算子,$C,D$ 为分别与 $N,M$ 可交换的拟幂零算子,如 $\ker\delta_{NM}\subset\ker\delta_{CD}$,则 $(N+C,M+D)$ 有(SPFA).

**定理2.4** 设 $(A,B)$ 有(SPFA),则对任何分别与 $A,B$ 可交换的幂零算子 $C,D$,如有 $X\in B(H)$,使 $(A+C)X=X(B+D)$,则必有 $AX=XB$,$CX=XD$.

**证明** 设 $(A,B)$ 有(SPFA),$C,D$ 幂零,$(A+C)X=X(B+D)$,则 $AX-XB=-(CX-XD)$,即 $\delta_{AB}(X)=-\delta_{CD}(X)$.由于 $C,D$ 与 $A,B$ 可交换,$\delta^{(2)}_{AB}(X)=\delta_{AB}(-\delta_{CD}(X))=-\delta_{CD}(\delta_{AB}(X))=(-1)^2\delta^{(2)}_{CD}(X)$,同理 $\delta^{(3)}_{AB}(X)=(-1)^3\delta^{(3)}_{CD}(X)$,$\cdots$,$\delta^{(n)}_{AB}(X)=(-1)^n\delta^{(n)}_{CD}(X)$.因 $C,D$ 幂零,同定理2.1证明,可以取到 $n$,使 $\delta^{(n)}_{CD}(X)=0$,因此 $\delta^{(n)}_{AB}(X)=0$.因 $(A,B)$ 有(SPFA),故 $\delta_{AB}(X)=0$,即 $AX=XB$,从而 $CX=XD$.

定理2.4为[3]或[4]中结论在幂零算子情形下的一个推广.

**推论2.5** 设 $A,B\in B(H)$,则下面两个事实等价

(i) 如有 $X$,使 $AX=XB$,则 $A^*X=XB^*$.

(ii) 对任意的与 $A,B$ 分别可交换的幂零算子 $C,D$,如有 $X$,使 $(A+C)X=X(B+D)$,则 $(A^*+C)X=X(B^*+D)$.

**证明** (i)$\Rightarrow$(ii) 如 $(A,B)$ 有(i),则由[2]知,$(A,B)$ 有(SPFA),由定理2.4知,如有 $X\in$

$B(H)$, 使 $(A+C)X = X(B+D)$, 则 $AX = XB$, $CX = XD$, 故 $A^*X = XB^*$, 即 $(A^*+C)X = X(B^*+D)$.

(ii) ⇒ (i)　取 $C = 0$, $D = 0$ 即可.

当 $A$, $B$ 为正规算子时, (i) 成立即为 Putnam-Fuglede 定理; (ii) 也成立, 为幂零算子扰动下的 PF 定理. 推论 2.5 说明 $(A, B)$ 满足 PF 定理与满足幂零扰动下的 PF 定理是等价的.

**定理 2.6**　设 $(A, B)$ 有 (SPFA), $C$, $D$ 为幂零算子且分别与 $A$, $B$ 可交换, 则 $(A+C, B+D)$ 也有 (SPFA) 的充要条件为 $\ker\delta_{AB} \subset \ker\delta_{CD}$.

**证明**　设 $(A, B)$ 为 (SPFA), 则由定理 2.4, $(A, B)$ 满足 [3] 或 [4] 中的定理, 即如有 $X$, 使 $(A+C)X = X(B+D)$, 必有 $AX = XB$, $CX = XD$. 完全类似于定理 2.1 的证明, 可以得到 $\ker\delta_{AB} \subset \ker\delta_{CD}$ 为 $(A+C, B+D)$ 有 (SPFA) 的充要条件.

**推论 2.7**　设 $A, B \in B(H)$, $A$ 可逆, 且 $\|A^{-1}\| \cdot \|B\| < 1$, $C$, $D$ 为分别与 $A$, $B$ 可交换的幂零算子, 则 $(A+C, B+D)$ 有 (SPFA).

**证明**　由 [5] 知, $(A, B)$ 有 (SPFA), 任取 $X \in \ker\delta_{AB}$, 则 $AX = XB$, 或 $X = A^{-1}XB$, 所以 $\|X\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|B\| \|X\|$. 若 $\|X\| \neq 0$, 则由条件, $\|X\| < \|X\|$ 矛盾, 故 $\|X\| = 0$. 即 $\ker\delta_{AB} = \{0\}$. 自然 $\ker\delta_{AB} \subset \ker\delta_{CD}$ 成立, 故由定理 2.6 知, $(A+C, B+D)$ 有 (SPFA).

## 3　$\delta_{AB}$ 与 $\delta_{f(A), f(B)}$

**定理 3.1**　设 $A$, $B$, $C$, $D$ 为正规算子, $AC = CA$, $BD = DB$, 则 $(A+C, B+D)$, $(AC, BD)$ 均有 (SPFA).

**证明**　由 Putnam-Fuglede 定理, 易证得 $A+C$, $B+D$, $AC$, $BD$ 都为正规算子, 故 $(A+C, B+D)$, $(AC, BD)$ 都有 (SPFA).

一般情况下, 设 $(A, B)$, $(C, D)$ 有 (SPFA), 且假设 $A$, $B$ 与 $C$, $D$ 可交换, 是否必须 $(A+C, B+D)$ 或 $(AC, BD)$ 也有 (SPFA)? 回答是否定的. 例如 $A = D = I + T$, $B = C = -I + T$, 这里 $T^2 \neq 0$, 而 $T^3 = 0$. $A + C = B + D = 2T$, $AC = BD = -I + T^2$, 由推论 2.2 知 $(A, B)$, $(C, D)$ 有 (SPFA), 但 $(A+C, B+D)$, $(AC, BD)$ 没有 (SPFA), 但仍有

**定理 3.2**　如 $(A, B)$, $(A, -B)$ 有 (SPFA), 则 $(A^2, B^2)$ 也有 (SPFA).

**证明**　$\delta_{A^2B^2}(X) = A^2X - XB^2 = A^2X - AXB + AXB - XB^2 = A(AX - XB) + (AX - XB)B = \delta_{A,-B}(\delta_{AB}(X))$, 所以 $\delta^{(2)}_{A^2B^2}(X) = \delta^{(2)}_{A,-B}(\delta^{(2)}_{AB}(X))$. 如 $\delta^{(2)}_{A^2B^2}(X) = 0$, 由 $(A, -B)$ 有 (SPFA), 即知 $\delta_{A,-B}(\delta^{(2)}_{AB}(X)) = 0$ 或 $\delta^{(2)}_{AB}(\delta_{A,-B}(X)) = 0$. 由于 $(A, B)$ 有 (SPFA), 知 $\delta_{AB}(\delta_{A,-B}(X)) = 0$ 即 $\delta_{A^2B^2}(X) = 0$. 故 $(A^2, B^2)$ 有 (SPFA).

一般地, 有

**定理 3.3**　设 $(A, \omega_i B)$ $(i = 0, 1, 2, \cdots, m-1)$ 有 (SPFA), 其中 $\{\omega_i\}$ 为 1 的 $m$ 个 $m$ 次复根, 则 $(A^m, B^m)$ 有 (SPFA).

**证明**　易证 $\delta_{A^m, B^m}(X) = \delta_{A,\omega_0 B}(\delta_{A,\omega_1 B}(\cdots(\delta_{A,\omega_{m-1}B}(X))\cdots))$ 与定理 3.2 证明类似, 可以证得, 如每个 $(A, \omega_i B)$ 有 (SPFA), 则 $(A^m, B^m)$ 也有 (SPFA).

讨论定理 3.3 的逆定理, 可得

**定理3.4** 如$(A^m, B^m)$有(SPFA),且$A$或$B$可逆,则$(A, \omega B)$有(SPFA),这里$\omega$为1的任一$m$次复根.

**证明** 设$(A^m, B^m)$有(SPFA),对任意的$X \in \ker\delta_{AB}^{(2)} A(AX - XB) = (AX - XB)B$,所以$A^m(AX - XB) = (AX - XB)B^m$,将此式化为$A(A^m X - XB^m) = (A^m X - XB^m)B$,故得$A^m(A^m X - XB^m) = (A^m X - XB^m)B^m$. 即$\delta_{A^m B^m}^{(2)}(x) = 0$. 因$(A^m, B^m)$有(SPFA). 故$\delta_{A^m B^m}(x) = 0$. 又$A^m X - XB^m = \sum_{i=0}^{m-1} A^{m-1-i}(AX - XB)B^i$,因$A(AX - XB) = (AX - XB)B$,故

$$A^m X - XB^m = mA^{m-1}(AX - XB) = m(AX - XB)B^{m-1}.$$

因$A^m X - XB^m = 0$,如$A$或$B$可逆,则$AX - XB = 0$,所以$X \in \ker\delta_{AB}$. $(A, B)$有(SPFA). 对任一$m$次复根$\omega$, $(\omega B)^m = B^m$,而$(A^m, (\omega B)^m)$有(SPFA),故$(A, \omega B)$有(SPFA).

**定理3.4条件中$A$或$B$的可逆性条件缺少时,结论未必成立.** 由[6]知,即使$A^m$正规,$(A, A)$也未必有(SPFA). 但如$A^m$正规,且$A$可逆,由[7]知,这时$A$本身即为正规算子,故$(A, A)$有(SPFA). 这与定理3.4结论相一致.

**定理3.5** 设$f(\lambda)$为一复系数多项式,$f(\lambda)$无重根,且$f(A) = 0, f(B) = 0$,则$(A, B)$有(SPFA).

**证明** 对任意的$x \in \ker\delta_{AB}^{(2)}, A(AX - XB) = (AX - XB)B$,因此$A^k X - XB^k = \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-1-i}(AX - XB)B^i = \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-1}(AX - XB) = kA^{k-1}(AX - XB), k = 1, 2, 3, \cdots$,故$f(A)X - Xf(B) = f'(A)(AX - XB)$.

若$f(A) = 0$,设$\sigma(A)$为$A$的谱集,由谱映照定理,$\sigma(f(A)) = f(\sigma(A))$. 如设$f(\lambda) = 0$的$m$个复根为$\{\lambda_i\}$则$\sigma(A) \subset \{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m\}$. 因$f(\lambda)$无重根,故$f'(\lambda) = 0$的任一复根必不属于$\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m\}$. 即不在$\sigma(A)$之中,故$f'(A)$必可逆,而$f'(A)(AX - XB) = 0$,从而$AX - XB = 0$. 即$(A, B)$有(SPFA).

**推论3.6** 设$m$为一正整数,$m \geq 2$,如

(1) $A^m = A, B^m = B$,

或

(2) $A^m = I, B^m = I$,

则$(A, B)$必有(SPFA).

**证明** (1) 令$f(\lambda) = \lambda^m - \lambda$,则$f(\lambda)$无重根,且$f(A) = 0, f(B) = 0$,故由定理3.5, $(A, B)$必有(SPFA).

(2) 令$f(\lambda) = \lambda^m - 1, f(\lambda)$无重根,且$f(A) = 0, f(B) = 0$,故$(A, B)$有(SPFA).

**定理3.7** 设$f(\lambda)$为一复系数多项式,如$(f(A), f(B))$有(SPFA),且$f'(A)$或$f'(B)$可逆,则$(A, B)$有(SPFA).

**证明** 任取$X \in \ker\delta_{AB}^{(2)}, A(AX - XB) = (AX - XB)B$,故$A^k(AX - XB) = (AX - XB)B^k, k = 0, 1, 2, \cdots$,故$f(A)(AX - XB) = (AX - XB)f(B)$. 将此式化为$A(f(A)X - Xf(B)) = (f(A)X - Xf(B))B$,知$\delta_{f(A), f(B)}^{(2)}(X) = 0$,因$(f(A), f(B))$有(SPFA). 故$\delta_{f(A), f(B)}(X) = 0$.

另一方面,$f(A)X - Xf(B) = f'(A)(AX - XB) = (AX - XB)f'(B)$ 如$f'(A)$或

$f'(B)$ 可逆, 由 $f(A)X - Xf(B) = 0$ 即知 $AX - XB = 0$, 所以 $(A, B)$ 有(SPFA).

**定理 3.8** 如 $(A, B)$, $(A, \lambda I - B)$ 有(SPFA), 其中 $\lambda$ 为一复数, 则 $(A^2 - \lambda A, B^2 - \lambda B)$ 有(SPFA).

**证明** $\delta_{A, \lambda I - B}(\delta_{AB}(x)) = A(AX - XB) - (AX - XB)(\lambda I - B) = \delta_{A^2 - \lambda A, B^2 - \lambda B}(X)$ 同定理 3.2 相同的证法, 可证得 $(A^2 - \lambda A, B^2 - \lambda B)$ 有(SPFA).

## 参 考 文 献


[1] Putnam C R. *Commutation Properties of Hilbert Space Operators and Related Topics* [M]. Springer, New York, 1967, 12.

[2] 李绍宽. 二次 Putnam-Fuglede 定理 [J]. 数学杂志, 1987, **7**(1): 78-80.

[3] Mattila K. *Normal operator and proper boundary points of the spectra of operators on a Banach space* [J]. Annal Acde. Sci Fen. Ser. A I, Math. Dissertation, 1978, 19.

[4] Dowson H R. *Spectral Theory of Linear Operators* [M]. Academic Press, New York, 1978.

[5] 陈 寅. *AX - XB* 型广义导算子的零空间 [J]. 河海大学学报, 1995, **23**(2): 56-60.

[6] 陈 寅. 关于广义导算子的零空间 [J]. 数学杂志, 1995, **15**(2): 137-141.

7 Stampfli J G. *Roots of scalar operators* [J]. Proc. Amer. Math. Soc., 1962, **13**: 796-798.


# On the Second Degree Putnam-Fuglede Theorem


*Chen Yin*

(Hehai University, Nanjing 210024)



**Abstract**

If $N$ is a normal operator which commutes with the commutator $NX - XN$, then $N$ commutes with $X$. This theorem is called the second degree Putnam-Fuglede theorem. In this paper, we shall obtain some sufficient and necessary conditions for the second degree Putnam-Fuglede theorem to be true under the perturbation of the nilpotent operators and for some non-normal operators.



**Keywords** normal operator, generalized derivation, nilpotent operator, the second degree Putnam-Fuglede theorem.