第19卷 增刊 数学研究与评论 Vol. 19 Supp
1999年4月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Apr. 1999

关于文"具有两个代数曲线解的三次系统的代数极限环"的注记*

刘美娟 张 成
(大连大学数学系, 116622)

摘 要: 本文弥补了文[4]中主要定理的不足之处, 并且推广了文[5]的结果.

关键词: 代数解, 极限环.
分类号: AMS(1991) 34C05/CLC O175.12
文献标识码: A **文章编号**: 1000-341X(1999)增刊-0266-03

1 引 言

对于具有两个二次代数曲线解的三次系统极限环的研究已有许多结果, 见文[1], [2]. 文[3]证明了具有两个相离圆解的三次系统可以存在代数极限环, 而文[4]证明了具有椭圆和抛物线解的三次系统可以存在代数极限环. 但在文[4]的证明中, 只证明了抛物线解 $y=ax^2+bx+c$ 当 $b\neq 0$ 时, 存在代数极限环 $x^2+y^2=1$. 而对 $b=0$ 的情形并未讨论. 本文对于 $b=0$ 时的情况进行讨论.

考虑三次微分系统:

$$\begin{cases}\dot{x}=\sum\limits_{0\le i+j\le 3}a_{ij}x^iy^j,\\ \dot{y}=\sum\limits_{0\le i+j\le 3}b_{ij}x^iy^j.\end{cases}\tag{E$_3$}$$

设 (E_3) 有不相交的椭圆解和抛物线解, 不失一般性, 可设

$$\begin{cases}\varphi(x,y)=x^2+y^2-1=0\\ F(x,y)=y-ax^2-c=0\end{cases}\tag{1}$$

(其中 $a\neq 0$) 为 (E_3) 的解, 有如下定理.

定理1 以二次曲线(1)为解的三次系统 (E_3) 其充要条件是化为如下形式:

$$\begin{cases}\dot{x}=\alpha yF(x,y)+(\beta x+\gamma)\varphi(x,y),\\ \dot{y}=-\alpha xF(x,y)+2[\alpha\gamma x+\beta(y-c)]\varphi(x,y),\end{cases}\tag{2}$$

其中 α, β, γ 均为任意常数.

证明 充分性显然, 现证必要性.

* **收稿日期**: 1996-12-11
作者简介: 刘美娟(1954-), 女, 辽宁大连市人, 现为大连大学数学系副教授.

由文[3]知具有二次代数曲线解 $\varphi(x,y)=0$ 的充要条件是(E_3)可化为如下形式:

$$\begin{cases} \dot{x}=-2y(k_1x^2+k_2xy+k_3y^2+k_4x+k_5y+k_6)+(k_7x+k_8y+k_9)(x^2+y^2-1) \\ \quad =P_3(x,y), \\ \dot{y}=2x(k_1x^2+k_2xy+k_3y^2+k_4x+k_5y+k_6)+(k_{10}x+k_{11}y+k_{12}(x^2+y^2-1) \\ \quad =Q_3(x,y), \end{cases} \tag{3}$$

其中 $k_i(i=1,2,3,\cdots,12)$ 均为任意常数

再令系统(3)有解 $F(x,y)=0$, 则沿抛物线 $F(x,y)=0$ 有

$$\frac{\partial F}{\partial x}\dot{x}+\frac{\partial F}{\partial y}\dot{y}\Big|_{y=ax^2+c}=0,$$

即 $Q_3(x,y)-2axP_3(x,y)\big|_{y=ax^2+c}=0$.

将 $y=ax^2+c$ 代入上式比较系数有

$$4a^4k_3-2a^4k_8=0,$$
$$a^3k_{11}+4a^3k_2-2a^3k_7=0,$$
$$4a^2k_1+a^2k_{10}+(2a^2+12a^3c)k_3+4a^3k_5-(2a^2+6a^3c)k_8-2a^3k_9=0,$$
$$(a+3a^2c)k_{11}+a^2k_{12}+(2a+8a^2c)k_2+4a^2k_4-(2a+4a^2c)k_7=0,$$
$$(2+4ac)k_1+(4ac+12a^2c^2)k_3+(2a+8a^2c)k_5+4a^2k_6,$$
$$+(2a^2-2ac-6a^2c^2)k_8-(2a+4a^2c)k_9+2ack_{10}=0,$$
$$(2c+4ac^2)k_2+(2+4ac)k_4-2ac^2k_7+(c-a+3ac^2)k_{11}+2ack_{12}=0,$$
$$(2c^2+4ac^3)k_3+(2c+4ac^2)k_5+4ack_6+(2ac-2ac^3)k_8+(2a-2ac^2)k_9+(c^2-1)k_{10}=0,$$
$$(c^3-c)k_{11}+(c^2-1)k_{12}=0.$$

从上各式解得: 当 $1+4a^2+4ac\neq0$ 且 $c\neq\pm1$ 时, 有:

$$k_2=0,k_4=0,k_5=\frac{-k_1+k_3}{a},k_6=\frac{ck_1-ak_3-ck_3}{a},$$
$$k_8=2k_3,k_{10}=2ak_9-2k_3,k_{11}=2k_7,k_{12}=-2ck_7.$$

代入系统(3)得

$$\begin{cases} \dot{x}=-2y\left(k_1x^2+k_3y^2+\frac{k_3-k_1}{a}y+\frac{ck_1-ak_3-ck_3}{a}\right)+(k_7x+2k_3y+k_9)(x^2+y^2-1), \\ \dot{y}=2x\left(k_1x^2+k_3y^2+\frac{k_3-k_1}{a}y+\frac{ck_1-ak_3-ck_3}{a}\right)+[(2ak_9-2k_3)x+2k_7y-2ck_7](x^2+y^2-1), \end{cases}$$

整理得

$$\begin{cases} \dot{x}=\frac{2}{a}y(k_1-k_3)(y-ax^2-c)+(k_7x+k_9)(x^2+y^2-1), \\ \dot{y}=-\frac{2}{a}x(k_1-k_3)(y-ax^2-c)+(2ak_9x+2k_7y-2ck_7)(x^2+y^2-1). \end{cases}$$

令 $\alpha=\frac{2}{a}(k_1-k_3)$, $\beta=k_7$, $\gamma=k_9$, 即化为系统(2)的形式 □

定理2 设 $F(x,y)=0$ 与 $\varphi(x,y)=0$ 不相交, 则当 $\beta=0$ 时系统(2)没有极限环, $\beta\neq0$ 时, 系统(2)存在代数极限环 $x^2+y^2=1$.

证明 取Dulac函数 $B(x,y)=\dfrac{1}{(x^2+y^2-1)(y-ax^2-c)}$ 计算

$$\mathrm{div}(BP,BQ)=\frac{\partial}{\partial x}(BP)+\frac{\partial}{\partial y}(BQ)=\frac{\beta}{y-ax^2-c}.$$

故当 $\beta=0$时, 系统(2) 可积, 因此没有极限环; 当 $\beta\neq 0$时, 由于 $x^2+y^2=1$与 $y=ax^2+c$ 不相交, 故在 $x^2+y^2=1$内部无闭轨, 又因为 $x^2+y^2=1$上没有奇点, 故这时 $x^2+y^2=1$成为系统(2) 的极限环. □

综合文[4]结果知道: 对于具有相离的抛物线与椭圆解的三次系统, 椭圆解可以成为三次系统的代数极限环.

参 考 文 献

[1] Belevec P S, Kozǔh I G. *A qualitative study in the large of a certain class of dynamical systems* [J]. (Russian). Differential'nye Uravnenija, 1974, **10**: 195—201, 369.

[2] Belevec P S, Kozüh I G. *Qualitative study in the large of a certain dynamical system* [J]. (Russian). Differential'nye Uravnenija, 1974, **10**: 1196- 1204, 1339.

[3] 黄启宇等. 具有二次代数极限环线的方程 $\frac{dy}{dx}=\frac{\sum_{0<i,j<3} a_{ij}x^iy^j}{\sum_{0<i,j<3} b_{ij}x^iy^j}$ [J]. 数学学报, 1960, **10**(2): 223—227.

[4] 张 成. 具有两个代数曲线解的三次系统的代数极限环 [J]. 数学研究与评论, 1995, **15**(Supp): 37-39.

[5] 张 成. 具有二个二次代数曲线解的三次系统的极限环 [J]. 辽宁师范大学学报, 1992, **2**: 101—102.

Remark on the Paper "Algebraic Limit Cycle of a Cubic System with Two Quadratic Algebraic Curve Solutions"

Liu Meijuan   Zhang Cheng

(Dept. of Math., Dalian University, 116622)

Abstract

In this paper we make up deficiency of mostly theorem in [4], and extend result of [5].

Keywords algebraic solution, limit cycle.