第19卷 增刊 数学研究与评论 Vol 19 Supp
1999年4月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Apr. 1999

一类非线性椭圆型方程的奇异边值问题*

叶 常 青
(漳州师范学院数学系, 福建漳州363000)

摘 要: 本文研究一类在球内的非线性椭圆奇异边值问题的正解的存在性, 推广了 H. Usami 1989年所得到的部分结果

关键词: 椭圆边值问题, 正解, 球, 局部 Hölder 连续, 严格减, 严格增
分类号: AMS(1991) 35J25/CLC O175.25
文献标识码: A **文章编号**: 1000-341X(1999)增刊-0269-08

1 引 言

本文研究如下的非线性椭圆奇异边值问题

$$\Delta u + f(x, u, \nabla u) = 0, \quad x \in B, \tag{1}$$

$$u = 0, \quad x \in \partial B, \tag{2}$$

其中 Δ 表 N 维拉普拉斯算子, ∇u 表函数 u 的梯度, B 表中心在原点半径为1的开球即 $B = \{x \in R^N: |x| < 1\}$, ∂B 为球 B 的边界, 假定空间 R^N 的维数 $N \geq 2$, 函数 $f: B \times (0, \infty) \times R^N \to (0, \infty)$, $f(x, u, p)$ $(p = (p_1, \cdots, p_N))$ 在 $x \in \partial B$ 以及在 $u = 0$ 处有奇性. 关于 $f(x, u, p)$ 的详细假定将在第3节中叙述. 要建立问题(1)—(2)具有 $C^2(B) \cap C(\overline{B})$ 类正解的定理.

1986年 S. M. Gomes[1] 曾研究过奇异边值问题

$$\Delta u + P(x) u^{-\lambda} = 0, \quad x \in B, \tag{3}$$

$$u = 0, \quad x \in \partial B, \tag{4}$$

其中常数 $\lambda > 0$, 函数 $P(x)$ 在 ∂B 上有奇性, 他获得了等价于(3)—(4)的积分方程有 $C^1(\overline{B})$ 类正解的充分条件. 近年来许多学者对奇异的椭圆边值问题进行了许多方面的研究, 如 C. A. Stuabt[2], T. Kosano and C. A. Swanson[3] 都取得了较好的结果, 1989年 H. Usami[4] 研究了较(3)—(4)更一般的奇异边值问题:

$$\Delta u + f(x, u) = 0, \quad x \in B. \tag{5}$$

$$u = 0, \quad x \in \partial B. \tag{6}$$

他论证了问题(5)—(6)有正解 $u \in C^2(B) \cap C(\overline{B})$ 的充要条件. 本文就是在[4]的基础上进行研究的, 本文中的定理推广了[4]中的定理1.

* 收稿日期: 1996-04-08; 修订日期: 1998-08-15
作者简介: 叶常青(1958-), 女, 福建漳州人, 漳州师范学院数学系讲师

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

2 引 理

先考虑方程(1)中的函数 f 为径向对称的情形, 即设 f 为形如 $F(|x|, u, |\nabla u|)$ 情形, 于是转到讨论奇异的常微分方程边值问题:

$$(t^{N-1}y')' + t^{N-1}F(t, y, |y'|) = 0, \quad 0 < t < 1, \tag{7}$$

$$y'(0) = 0, \quad y(1) = 0. \tag{8}$$

在下文中假定函数 F 满足下面的条件供以后的引理、定理选用

(A_1) $F: [0, 1) \times (0, \infty) \times [0, \infty) \to (0, \infty)$ 是连续函数, $F(t, y, z)$ 关于 $y > 0$, 关于 $z \geq 0$ 连续可微; 且对每一固定的 $t \in [0, 1)$, $F(t, y, z)$ 关于 $y > 0$ 严格减, 关于 $z \geq 0$ 严格减;

(A_2) 对 $\forall t_1, t_2 \in [0, 1)$ (设 $t_1 < t_2$), 则当 $\alpha > 0$ 充分小时有

$$\int_{t_2}^{1}\int_{s}^{1}\left(\frac{r}{s}\right)^{N-1}F(r, \alpha, d)\,\mathrm{d}r\mathrm{d}s > \alpha$$

关于 $d \geq 0$ 一致地成立;

(A_3) 对 $\forall c > 0, \forall d \geq 0$ 有 $\int_{t_2}^{1}\int_{s}^{1}\left(\frac{r}{s}\right)^{N-1}F(r, c, d)\,\mathrm{d}r\mathrm{d}s < \infty$.

用打靶法论证(7)—(8)存在正解, 为此考虑初值问题

$$(t^{N-1}y')' + t^{N-1}F(t, y, |y'|) = 0, \tag{9}$$

$$y(0) = \alpha, \quad y'(0) = 0, \tag{10}$$

在(10)式中 $\alpha > 0$ 为参数, 由假设(A_1)知对每一 $\alpha > 0$ 问题(9)—(10)存在唯一的正解[4] $y_\alpha(t)$, $t \in [0, T_\alpha)$, 其中 $[0, T_\alpha)$ 为正解 $y_\alpha(t)$ 的最大存在区间, 显然 T_α 的值依赖于 α, 它位于 $0 < T_\alpha \leq 1$, 注意到

$$y_\alpha'(t) = -\int_{t}^{1}\left(\frac{r}{t}\right)^{N-1}F(r, y_\alpha(r), |y_\alpha'(r)|)\,\mathrm{d}r < 0, \quad t \in (0, T_\alpha),$$

故正解 $y_\alpha(t)$ 在其存在区间 $[0, T_\alpha)$ 内严格减, 显见如果 $T_\alpha < 1$, 那么 $y_\alpha(t) > 0, 0 \leq t < T_\alpha$; $y_\alpha(T_\alpha) = 0$; 如果 $T_\alpha = 1$, 那么 $y_\alpha(t) > 0, 0 \leq t < 1$; $y_\alpha(1) \geq 0$.

引理1 设条件(A_1)成立, 设 α, β 为正数, 且 $\alpha > \beta$, 若 $y_\beta(t)$ 在 $[0, T)$ 上有定义, 则 $y_\alpha(t)$ 也在 $[0, T)$ 上有定义且

$$y_\alpha(t) > y_\beta(t), \quad t \in [0, T). \tag{11}$$

证明 (Ⅰ) 先假定 $y_\alpha(t)$ 也在 $[0, T)$ 上有定义, 下证(11)式成立. 采用反证法. 因为 $y_\alpha(0) - y_\beta(0) = \alpha - \beta > 0$, 故在 $t = 0$ 附近有 $y_\alpha(t) > y_\beta(t)$, 如果(11)式不成立则存在 $\tau \in (0, T)$ 使

$$y_\alpha(t) > y_\beta(t), \quad 0 \leq t < \tau, \tag{12}$$

$$y_\alpha(\tau) = y_\beta(\tau). \tag{13}$$

由(12), (13)得 $y_\alpha'(\tau) \leq y_\beta'(\tau)$, 由此将导出下面的矛盾:

(i) 若 $y_\alpha'(\tau) < y_\beta'(\tau)$.

由 y_α', y_β' 的连续性知存在 $\tau_0 \in (0, \tau)$ 使 $y_\alpha'(t) < y_\beta'(t)$, $\tau_0 \leq t \leq \tau$, 注意到 $y_\alpha' \leq 0, y_\beta' \leq 0$ 故有

$$|y_\alpha'(t)| > |y_\beta'(t)|, \quad \tau_0 \leq t \leq \tau \tag{14}$$

积分(9)式, 并利用(10)式得

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

$$y_\alpha'(t) - y_\beta'(t) = \int \left(\frac{r}{t}\right)^{N-1}[F(r, y_\beta(r), |y_\beta'(r)|) - F(r, y_\alpha(r), |y_\alpha'(r)|)]\mathrm{d}r.$$

再从 τ_0 到 τ 积分上式, 由 (A_1), (12), (14) 得

$$y_\alpha(\tau) - y_\alpha(\tau_0) - y_\beta(\tau) + y_\beta(\tau_0)$$
$$= \int_0 \int \left(\frac{r}{s}\right)^{N-1}[F(r, y_\beta(r), |y_\beta'(r)|) - F(r, y_\alpha(r), |y_\alpha'(r)|)]\mathrm{d}r\mathrm{d}s > 0,$$

即

$$y_\alpha(\tau) - y_\beta(\tau) > y_\alpha(\tau_0) - y_\beta(\tau_0) > 0.$$

这与 (13) 式矛盾.

(ii) 若 $y_\alpha'(\tau) = y_\beta'(\tau)$, 记 $a = y_\alpha(\tau) = y_\beta(\tau)$, $b = y_\alpha'(\tau) = y_\beta'(\tau)$, 那么 $y_\alpha(t)$, $y_\beta(t)$, $0 \le t < \tau$ 可看成满足同一初值问题

$$(t^{N-1}y')' + t^{N-1}F(t, y, |y'|) = 0, \quad 0 < t < \tau, \tag{15}$$

$$y(\tau) = a, \quad y'(\tau) = b, \tag{16}$$

由向后打靶法产生的两个解, 但由假设 (A_1), 依据常微知识知问题 (15) — (16) 的解是唯一的. 矛盾.

上面的矛盾说明了当 $y_\alpha(t)$ 在 $[0, T)$ 上有定义时, (11) 式必成立.

(Ⅱ) 次证 $y_\alpha(t)$ 在 $[0, T)$ 上有定义, 事实上若 $y_\alpha(t)$ 的存在区间为 $[0, T_1)$, $T_1 < T$, 那么 $y_\alpha(T_1) = 0 < y_\beta(T_1)$. 由假设 $y_\alpha(0) = \alpha > \beta = y_\beta(0)$, 故曲线 $y_\alpha(t)$ 与 $y_\beta(t)$ 必相交, 于是存在 $t_1 \in (0, T_1)$ 使得 $y_\alpha(t) > y_\beta(t)$, $0 \le t < t_1$; $y_\alpha(t_1) = y_\beta(t_1)$ 如 (Ⅰ) 证法, 导出矛盾, 故 $y_\alpha(t)$ 在 $[0, T)$ 上也有定义.

引理2 设条件 (A_1) - (A_3) 成立, 则问题 (7) — (8) 存在唯一正解 $y_{\alpha_0} \in C^2[0, 1) \cap C[0, 1]$.

证明 这个引理的论证过程较长, 所以分几段来证, 首先定义两个集合

$$\bar{S} = \{\alpha > 0: y_\alpha(t) \text{ 在 } [0, 1) \text{ 上存在, 且 } y_\alpha(1) > 0\},$$
$$\underline{S} = \{\alpha > 0: y_\alpha(t) \text{ 在 } t = 1 \text{ 之前变为零}\}.$$

由引理1知对 $\forall \alpha \in \bar{S}$, $\forall \beta \in \underline{S}$, 则 $\alpha > \beta$, 故 $\bar{S} \cap \underline{S} = \varnothing$.

(i) 证 $\bar{S}$ 非空

下证当 $\alpha > 0$ 充分大时, $y_\alpha(t) > \frac{\alpha}{2}$, $t \in [0, 1)$ 于是 $\alpha \in \bar{S}$. 事实上由假设 (A_3) 知对 $\forall c > 0$, $\forall d \ge 0$ 有

$$\int\int \left(\frac{r}{s}\right)^{N-1} F(r, c, d)\,\mathrm{d}r\mathrm{d}s < \infty,$$

注意到假设 (A_1), $F(t, y, z)$ 关于 $y > 0$, 关于 $z \ge 0$ 都是严格减的, 故可能充分大的 α 使

$$\int\int \left(\frac{r}{s}\right)^{N-1} F\left(r, \frac{\alpha}{2}, 0\right)\mathrm{d}r\mathrm{d}s < \frac{\alpha}{2}. \tag{17}$$

下面证明对满足 (17) 式的 α 有 $y_\alpha(t) > \frac{\alpha}{2}$, $t \in [0, 1)$. 不然的话, 则存在 $t_1 \in (0, 1)$, 使得

$$y_\alpha(t) > \frac{\alpha}{2}, \ 0 \le t < t_1; \ y_\alpha(t_1) = \frac{\alpha}{2}.$$

由 (9) — (10) 有

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

$$y_\alpha(t_1) - \alpha + \int_0^1\int_0^r \left(\frac{r}{s}\right)^{N-1} F(r, y_\alpha(r), |y_\alpha'(r)|)\,\mathrm{d}r\mathrm{d}s = 0,$$

由(A$_1$)及(17)得

$$\begin{aligned}\frac{\alpha}{2} &= \int_0^1\int_0^r \left(\frac{r}{s}\right)^{N-1} F(r, y_\alpha(r), |y_\alpha'(r)|)\,\mathrm{d}r\mathrm{d}s \\ &< \int_0^1\int_0^r \left(\frac{r}{s}\right)^{N-1} F(r, \frac{\alpha}{2}, 0)\,\mathrm{d}r\mathrm{d}s \\ &\le \int_0^1\int_0^r \left(\frac{r}{s}\right)^{N-1} F(r, \frac{\alpha}{2}, 0)\,\mathrm{d}r\mathrm{d}s < \frac{\alpha}{2},\end{aligned}$$

矛盾. 故 $y_\alpha(t) > \frac{\alpha}{2}$, $t\in[0, 1)$, 所以 $\alpha\in\overline{S}$.

(ii) 证 $\underline{S}$ 非空

下证当 $\alpha > 0$ 充分小时则 $\alpha\in\underline{S}$, 事实上由(A$_2$)知当 $\alpha > 0$ 充分小时有

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\int_0^r \left(\frac{r}{s}\right)^{N-1} F(r, \alpha, d)\,\mathrm{d}r\mathrm{d}s > \alpha, \text{ 关于 } d \ge 0 \text{ 一致地成立}, \tag{18}$$

断言对满足(18)的 α, 则 $y_\alpha(t)$ 在 $t = \frac{1}{2}$ 之前变为零, 不然的话若正解 $y_\alpha(t)$ 的变量 t 可延伸到 $t = \frac{1}{2}$, 即设 $0 < y_\alpha(t) \le \alpha$, $t\in[0, \frac{1}{2}]$, 那么由(9)—(10), (A$_1$), (18)得

$$\begin{aligned}-y_\alpha(\frac{1}{2}) &= -\alpha + \int_0^{\frac{1}{2}}\int_0^r \left(\frac{r}{s}\right)^{N-1} F(r, y_\alpha(r), |y_\alpha'(r)|)\,\mathrm{d}r\mathrm{d}s \\ &> -\alpha + \int_0^{\frac{1}{2}}\int_0^r \left(\frac{r}{s}\right)^{N-1} F(r, \alpha, \max_{0\le r\le\frac{1}{2}} |y_\alpha'(r)|)\,\mathrm{d}r\mathrm{d}s \\ &= -\alpha + \int_0^{\frac{1}{2}}\int_0^r \left(\frac{r}{s}\right)^{N-1} F(r, \alpha, d)\,\mathrm{d}r\mathrm{d}s, \text{ 其中 } d = \max_{0\le r\le\frac{1}{2}} |y_\alpha'(r)| \\ &> -\alpha + \alpha = 0.\end{aligned}$$

由上式得 $y_\alpha(\frac{1}{2}) < 0$, 矛盾, 故 $\alpha\in\underline{S}$, 即 $\underline{S}$ 非空

(iii) 证 $\inf\overline{S}\in\overline{S}$.

令 $\alpha_* = \inf\overline{S}$, 显见 $\alpha_*\in(0, \infty)$, 若 $\alpha_*\in\overline{S}$, 则 $y_{\alpha_*}(1) \equiv l > 0$, 由(A$_3$)知可取 $t_1\in(0, 1)$ 且充分接近于1使得

$$\int_{t_1}^1\int_0^r \left(\frac{r}{s}\right)^{N-1} F(r, \frac{l}{2}, 0)\,\mathrm{d}r\mathrm{d}s < \frac{l}{2}. \tag{19}$$

注意到(9)—(10)的解对初值的连续依赖性, 那么对充分接近于 α_* 的 $\alpha\in(0, \alpha_*)$, $y_\alpha(t)$ 在 $[0, t_1]$ 有定义且

$$y_\alpha(t_1) > l, \tag{20}$$

断言在 $y_\alpha(t)$ 的存在区间上必有 $y_\alpha(t) > \frac{l}{2}$, 从而 $y_\alpha(t)$ 的存在区间为 $[0, 1)$, 且 $\alpha\in\overline{S}$, 事实上如果断言不真, 那么存在 $t_2\in(t_1, 1)$ 使得

$$y_\alpha(t) > \frac{l}{2},\ t_1 \le t < t_2;\ y_\alpha(t_2) = \frac{l}{2}. \tag{21}$$

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

积分(9)—(10), 再由(A_1), (21), (20), (19)得

$$\frac{1}{2}= y_\alpha(t_2) = y_\alpha(t_1) - \int_1^2\int(\frac{r}{s})^{N-1}F(r, y_\alpha(r), |y_\alpha'(r)|)\,drds$$

$$\geq l - \int_1^2\int(\frac{r}{s})^{N-1}F(r, \frac{1}{2}, 0)\,drds$$

$$\geq l - \int_1^2\int(\frac{r}{s})^{N-1}F(r, \frac{1}{2}, 0)\,drds$$

$$> l - \frac{1}{2} = \frac{1}{2},$$

矛盾, 故 $\alpha\in\bar{S}$, 但这又与 $\alpha_* = \inf\bar{S}$ 的意义抵触, 所以 $\inf\bar{S}\notin\bar{S}$.

(iv) 类似地可证 $\sup\underline{S}\notin\underline{S}$.

(v) 证 $\alpha_0 = \inf\bar{S} = \sup\underline{S}$.

由集合 $\bar{S}$, $\underline{S}$ 的意义及引理1知对 $\forall\alpha\in\bar{S}$, $\forall\beta\in\underline{S}$, 则 $\beta<\alpha$, 故 $\sup\underline{S}\leq\inf\bar{S}$, 可以证明 $\sup\underline{S} < \inf\bar{S}$ 不成立. 故 $\alpha_0 = \inf\bar{S} = \sup\underline{S}$. 由此知问题(7)—(8)存在唯一正解 $y_{\alpha_0}\in C^2[0, 1)\cap C[0, 1]$.

3 主要结果

假定奇异非线性椭圆边值问题(1)—(2)中的函数 $f(x, u, p)$ $(p = (p_1, \cdots, p_N))$ 满足下列条件

(B_1) $f: B\times(0, \infty)\times R^N\to(0, \infty)$ 是局部Hölder连续函数(指数 $\theta\in(0, 1)$), 且 $f(x, u, p)$ 关于 $u\in(0, \infty)$ 关于 $p\in R^N$ 连续可微(关于 p 连续可微是指 $\frac{\partial f}{\partial p_i}$, $i = 1, \cdots, N$ 存在且连续);

(B_2) 对于每一紧区域 $\Omega\subset B$ 存在连续函数 P_Ω: $(0, \infty)\to(0, \infty)$ 使得

$$|f(x, u, p)|\leq P_\Omega(u)(1+|p|^2),\ (x, u, p)\in\Omega\times(0, \infty)\times R^N;$$

(B_3) 存在函数 f_*, f^*: $[0, 1)\times(0, \infty)\times[0, \infty)\to(0, \infty)$, 且 $f_*, f^*\in C^\theta_{loc}([0, 1)\times(0, \infty)\times[0, \infty))$, 且 $f_*(t, u, v), f^*(t, u, v)$ 关于 $u>0$, 关于 $v\geq0$ 连续可微; 且对每一固定的 $t\in[0, 1)$, $f_*(t, u, v), f^*(t, u, v)$ 关于 $u>0$ 严格减, 关于 $v\geq0$ 也是严格减的;

(B_4) f_* 满足条件(A_2), f^* 满足条件(A_3); 且 f_*, f^* 和 f 满足下面的不等式

$$f_*(|x|, u, |p|)\leq f(x, u, p)\leq f^*(|x|, u, |p|),\ (x, u, p)\in B\times(0, \infty)\times R^N. \tag{22}$$

定理 设条件(B_1)-(B_4)成立, 则奇异边值问题(1)—(2)有正解 $u\in C^2(B)\cap C(\bar{B})$.

证明 考察下列边值问题

$$\begin{cases} \Delta u + f^*(|x|, u, 0) = 0, & x\in B, \quad (23)\\ u = 0, & x\in\partial B, \quad (24)\end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta u + f_*(|x|, u, |\nabla u|) = 0, & x\in B, \quad (25)\\ u = 0, & x\in\partial B. \quad (26)\end{cases}$$

由[4]中的定理1知问题(23)—(24)有径向正解 $\bar{u}(|x|)$, 且 $\bar{u}\in C^2(B)\cap C(\bar{B})$; 由引理2知问题

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

(25)—(26)有径向正解 $\underline{u}(|x|)$, 且 $\underline{u}\in C^2(B)\cap C(\overline{B})$. 注意到条件$(B_3)$中的 $f_*, f^*\in C^{\theta}_{loc}$依解的正则性定理[5]知 $\overline{u}, \underline{u}\in C^{2+\theta}_{loc}(B)\cap C(\overline{B})$. 可以证明 $\underline{u}(|x|)\le\overline{u}(|x|), x\in B$

令$B_n=\{x\in R^N: |x|<1-\frac{1}{n}\}, n=2,3,\cdots$. 任取一函数 $h\in C^{2+\theta}_{loc}(B)\cap C(\overline{B})$ 且满足

$$\underline{u}(|x|)\le h(x)\le\overline{u}(|x|),\quad x\in B. \tag{27}$$

由(22)以及 $f^*(t,u,v)$ 关于 v 严格减, 故有

$$f(x,u,p)\le f^*(|x|,u,|p|)\le f^*(|x|,u,0),\ (x,u,p)\in B\times(0,\infty)\times R^N, \tag{28}$$

由(27), (28)以及 $\overline{u}$ 满足(23), 于是对每一 $n\ge 2$, $\overline{u}$ 满足

$$\Delta\overline{u}+f(x,\overline{u},\nabla\overline{u})\le 0,\quad x\in B_n,$$
$$\overline{u}\ge h(x),\quad x\in\partial B_n,$$

即 $\overline{u}$ 为边值问题

$$\Delta u+f(x,u,\nabla u)=0,\quad x\in B_n, \tag{29}$$
$$u=h(x),\quad x\in\partial B_n \tag{30}$$

的上解. 类似地由(22), (27)以及 $\underline{u}$ 满足(25), 故对每一 $n\ge 2$, $\underline{u}$ 满足

$$\Delta\underline{u}+f(x,\underline{u},\nabla\underline{u})\ge 0,\quad x\in B_n,$$
$$\underline{u}\le h(x),\quad x\in\partial B_n,$$

即 $\underline{u}$ 是边值问题(29)—(30)的下解.

由假设(B_1), (B_2)以及上面所得的上解 $\overline{u}$, 下解 $\underline{u}$, 依据[6]中的引理3.1知对每一 $n\ge 2$边值问题(29)—(30)存在正解 $u_n\in C^{2+\theta}(\overline{B_n})$, 且满足

$$\underline{u}(|x|)\le u_n(x)\le\overline{u}(|x|),\quad x\in\overline{B_n}. \tag{31}$$

再依[6]中的引理3.3知对固定的整数 $n(n\ge 2)$ 存在常数 $C(n)$ 使得

$$\|u_j\|_{C^{2+\theta}(\overline{B_n})}\le C(n),\quad j\ge n+1, \tag{32}$$

其中常数 $C(n)$ 不依赖于 j. 由[7]中的定理1.31知嵌入 $C^{2+\theta}(\overline{B_n})\to C^2(\overline{B_n})$ 是紧的, 按通常取对角线的方法知序列$\{u_n\}$存在子序列$\{u_{n(k)}\}$在球 B 的每一紧子集上依 C^2的拓扑收敛于某一正的函数 $u_\infty\in C^2(B)$, 容易看到 u_∞满足方程(1), 还注意到在球 B 的边界 ∂B 上 $\underline{u}=\overline{u}=0$, 故由(31)推出在 ∂B 上 $u_\infty=0$. 于是函数 u_∞就是奇异边值问题(1)—(2)在 $C^2(B)\cap C(\overline{B})$ 类中的正解.

4 例 子

例 考察下面的奇异非线性椭圆边值问题

$$\Delta u+\frac{\varphi(x)}{(1-|x|^2)^{\lambda}}\left[\frac{1}{1+u|\nabla u|^2}+\frac{1}{u^{\alpha}}\right]=0,\quad x\in B, \tag{33}$$

$$u=0,\quad x\in\partial B, \tag{34}$$

其中常数 $\alpha>0$, $0<\lambda<1$; 函数 $\varphi\in C^{\theta}(\overline{B})$ $(\theta\in(0,1))$, 且满足$0<a\le\varphi(x)\le b$, $x\in\overline{B}$, 这里 a, b 是常数; $B=\{x\in R^N: |x|<1\}$同前, 这里假设$N\ge 3$.

下面检验方程(33)中的函数

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

$$f(x,u,p)=\frac{\varphi(x)}{(1-|x|^2)^{\lambda}}\left[\frac{1}{1+u|p|^2}+\frac{1}{u^{\alpha}}\right],\quad (x,u,p)\in B\times(0,\infty)\times R^N$$

满足定理中的各个条件, 显见 $f:B\times(0,\infty)\times R^N\to(0,\infty)$ 满足 (B_1), (B_2).

(B_3) 记 $\varphi_*(t)=\min\limits_{|x|=t}\varphi(x)$, $\varphi^*(t)=\max\limits_{|x|=t}\varphi(t)$, $t\in[0,1)$, 取

$$f_*(t,u,v)=\frac{\varphi_*(t)}{(1-t^2)^{\lambda}}\left[\frac{1}{1+uv^2}+\frac{1}{u^{\alpha}}\right],$$

$$f^*(t,u,v)=\frac{\varphi^*(t)}{(1-t^2)^{\lambda}}\left[\frac{1}{1+uv^2}+\frac{1}{u^{\alpha}}\right],$$

则 $f_*,f^*:[0,1)\times(0,\infty)\times[0,\infty)\to(0,\infty)$. 由于 $\varphi\in C^{\theta}(\overline{B})$, 易见 $\varphi_*,\varphi^*\in C^{\theta}[0,1]$, 还容易看到 f_*,f^* 关于 $u\in(0,\infty)$, 关于 $v\in[0,\infty)$ 连续可微, 故 $f_*,f^*\in C^{\theta}_{loc}([0,1)\times(0,\infty)\times[0,\infty))$; 显见对每一固定的 $t\in[0,1)$, f_*,f^* 关于 $u\in(0,\infty)$ 关于 $v\in[0,\infty)$ 都是严格减;

(B_4) 对 $\forall t_1,t_2\in[0,1)$, 其中 $t_1<t_2$, 由假设 $0<a\le\varphi(x)\le b$, $x\in B$, 故对 $\forall c>0$, $\forall d\ge0$, 有

$$\iint_{t_1}^{t_2}\left(\frac{r}{s}\right)^{N-1}f_*(r,c,d)\,\mathrm{d}r\mathrm{d}s\ge\iint_{t_1}^{t_2}\left(\frac{r}{s}\right)^{N-1}\frac{a}{(1-r^2)^{\lambda}}\left[\frac{1}{1+cd^2}+\frac{1}{c^{\alpha}}\right]\mathrm{d}r\mathrm{d}s$$

$$>\frac{a}{c^{\alpha}}\iint_{t_1}^{t_2}\left(\frac{r}{s}\right)^{N-1}\frac{1}{(1-r^2)^{\lambda}}\mathrm{d}r\mathrm{d}s=k\frac{1}{c^{\alpha}}.$$

其中常数 $k=a\iint_{t_1}^{t_2}\left(\frac{r}{s}\right)^{N-1}\frac{1}{(1-r^2)^{\lambda}}\mathrm{d}r\mathrm{d}s>0>c$, 当 $0<c<k^{\frac{1}{\alpha+1}}$ 时, 且上式关于 $d\ge0$ 一致地成立 故 f_* 满足条件 (A_2); 又因

$$\iint_{t_1}^{t_2}\left(\frac{r}{s}\right)^{N-1}f^*(r,c,d)\,\mathrm{d}r\mathrm{d}s\le\iint_{t_1}^{t_2}f^*(r,c,d)\,\mathrm{d}r\mathrm{d}s$$

$$=\int_{t_1}^{t_2}f^*(r,c,d)\,\mathrm{d}r\int_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}s=\int_{t_1}^{t_2}(1-r)f^*(r,c,d)\,\mathrm{d}r$$

$$\le\int_{t_1}^{t_2}(1-r)\frac{b}{(1-r^2)^{\lambda}}\left[\frac{1}{1+cd^2}+\frac{1}{c^{\alpha}}\right]\mathrm{d}r$$

$$<b\left[\frac{1}{1+cd^2}+\frac{1}{c^{\alpha}}\right]\int_{t_1}^{t_2}(1-r)^{1-\lambda}\mathrm{d}r$$

$$=\frac{b}{2-\lambda}\left[\frac{1}{1+cd^2}+\frac{1}{c^{\alpha}}\right]<\infty,$$ 对 $\forall c>0$, $\forall d\ge0$ 成立,

故 f^* 满足条件 (A_3).

依 f_*,f^* 的定义, 显见不等式

$$f_*(|x|,u,|p|)\le f(x,u,p)\le f^*(|x|,u,|p|),\quad (x,u,p)\in B\times(0,\infty)\times R^N$$

成立

以上检验了方程(33)中的函数 $f(x,u,p)$ 满足定理的所有条件, 故依定理的结论知奇异边值问题(33)—(34)存在正解 $u\in C^2(B)\cap(\overline{B})$.

参 考 文 献

[1] Gomes S M. *On a singular nonlinear elliptic problem* [J]. SIAM J. Math. Anal, 1986, **17**: 1359-

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

1369.

[2] Stuart C A. *Existence theorems for a class of nonlinear integral equation* [J]. Math. Z., 1974, **137**: 49 - 66.

[3] Kusano T and Swanson C A. *Asymptotic properties of semilinear elliptic equations* [J]. Funkcialaj Ekvacioj, 1983, **26**: 115- 129.

[4] Usami H. *On a singular elliptic boundary value problem in a ball* [J]. Nonlinear Anal. Theory Math. Appl. B., 1989, 1163- 1170.

[5] Gihbarg D and Trudinger N S. *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order* [M]. 2nd ed. Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York, 1983.

[6] Noussair E S. *On semilinear elliptic boundary value problem in unbounded domains* [J]. J. Differential Equations, 1981, **41**: 334- 348.

[7] Adams R A. *Sobolev Spaces* [M]. New York, San Francisco, London, 1975.

The Singular Boundary Value Problems for a Class of Nonlinear Elliptic Equations

Ye Changqing

(Dept. of Math., Zhangzhou Teachers' College, 363000)

Abstract

This paper studies the existence of positive solutions to a class of singular nonlinear elliptic boundary value problem in a ball, and extends the partial results obtained by H. Usami in 1989.

Keywords elliptic boundary value problem, positive solution, ball, local Hölder continuous, strictly decreasing, strictly increasing.

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.