双曲型时滞偏差分方程解的振动性*

刘 树 堂
(滨州师范专科学校数学系, 山东256604)

摘 要: 本文主要讨论了双曲型时滞偏差分方程

$$A_{m+1,n}+(a-1)A_{m,n+1}-(p+a)A_{mn}+\sum_{i=1}^{u}q_iA_{m-k_i,n-l_i}=0$$

的所有解振动的充分必要条件和振动性的判别准则, 其中 $a-1\neq 0$, $p+a>0$, q_i 是实数, k_i, l_i 是非负整数, u 是一个正整数, $i=1,2,\cdots,u$.

关键词: 时滞偏差分方程, 振动, 特征方程

分类号: AMS(1991) 39A10/CCL O175.7

文献标识码: A **文章编号**: 1000-341X(1999)增刊-0277-05

1 引 言

自从L. H. Erbe 和B. G. Zhang 在美国Ohio 国际微分方程会议上提出时滞差分方程的研究以来[1], 已有不少的成果, 一些基本的结果已收集在 I Gyori 和 G. Ladas 的书中[2], 而对于偏差分方程的研究才刚刚开始[3-9], 偏差分方程不仅在偏微分方程数值解中有着重要的应用, 它本身也是一些实际问题的数学模型, 例如李向平[10]提出用偏差分方程研究分子轨道的能级和载波, 因此对于偏差分方程的研究不仅有理论意义, 而且有重要的实际应用背景.

本文利用 Z 变换理论, 研究如下双曲型时滞偏差分方程

$$A_{m+1,n}+(a-1)A_{m,n+1}-(p+a)A_{mn}+\sum_{i=1}^{u}q_iA_{m-k_i,n-l_i}=0 \qquad (1.1)$$

所有解的振动性, 其中

$$\left.\begin{array}{l} q_i\ \text{是实数},\ k_i,\ l_i\ \text{是非负整数},\ i=1,2,\cdots,u \\ a-1\neq 0,\ p,a\in(0,\infty),\ u\ \text{是正整数} \end{array}\right\} \qquad (1.2)$$

得到了方程(1.1)的每一个解振动的充分必要条件和解振动的判别准则, 而与方程(1.1)对应的连续型时滞偏微分方程为 $\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 A}{\partial y^2}+a\frac{\partial A}{\partial y}-pA(x,y)+\sum_{i=1}^{u}q_iA(x-\sigma_i,y-\tau_i)=0$, 其中 $\sigma_i,\tau_i\in[0,\infty)$, $i=1,2,\cdots,u$, 而 $A=A(x,y)$ 是未知函数. 因此对于方程(1.1)的研究可以为连续型情况提供有用的资料和信息. 令

* 收稿日期: 1995-10-10; 修订日期: 1997-10-12
基金项目: 国家自然科学基金和山东省自然科学基金资助项目

$N_t = \{t, t+1, t+2, \cdots, |t$ 是整数$\}$,

$k = \max\{k_i | 1 \le i \le u\}$, $l = \max\{l_i | 1 \le i \le u\}$,

$\Omega = N_{-k} \times N_{-l} \setminus N_{-1} \times N_{-1}$.

则在区域 Ω 上给定初始值$\{\varphi_{ij}\}$, 容易构造(1. 1)的唯一解$\{A_{ij}\}$, 事实上对于方程(1. 1), 有

$$A_{m+1,n} = (p+a)A_{mn} + (a-1)A_{m,n+1} - \sum_{i=1}^{u} q_i A_{m-k_i,n-l_i}$$

从而可以唯一确定$A_{10}, A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}, \cdots$.

对于双指标序列$\{A_{mn}\}$, 若$\{A_{mn}\}$满足方程(1. 1), 则称$\{A_{mn}\}$是(1. 1)的解, 若对于充分大的 m, n 有$A_{mn} > 0$, 称$\{A_{mn}\}$是(1. 1)的最终正解, 若$\{A_{mn}\}$即不是最终为正, 又不是最终为负, 称(1. 1)的每一个解是振动的

为了得到方程(1. 1)的每一个解振动的充分必要条件, 首先考虑下列引理

2 有关的引理

设$\{f(m,n)\}$是双指标序列, $(m,n) \in N_0^2$, 则称

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} f(m,n) z_1^{-m} z_2^{-n} \quad |z_i| > r_i, \ i = 1, 2 \tag{2. 1}$$

为$\{f(m,n)\}$的 Z 变换, 记为$Z(f(m,n)) = F(z_1, z_2) = \sum_{m,n=0}^{\infty} f(m,n) z_1^{-m} z_2^{-n}$, $|z_i| > r_i, i = 1, 2$, 其中 r_i 是复级数(2. 1)的收敛半径

引理2. 1[11] 如果存在正常数M_0, M, N 使得$|f(m,n)| \le M_0 r_1^m, r_2^n, m \ge M, n \ge N$, 则$\{f(m,n)\}$的 Z 变换存在

当 $s < 0, t < 0$时, 约定 $\sum_{s=p}^{\infty}\sum_{t=q}^{\infty} f(s,t) z_1^{-s} z_2^{-t}$中的$f(s,t) = 0$, 由直接的计算可得

引理2. 2 下列公式成立

(i) $Z(f(m-k, n-l)) = z_1^{-k} z_2^{-l} F(z_1, z_2)$;

(ii) $\sum_{i=0}^{\infty} F(k+i, z_2) z_1^{-i} = z_1^{k}\left(F(z_1, z_2) - \sum_{m=0}^{k-1} F(m, z_2) z_1^{-m}\right)$, 其中$F(k+i, z_2) = \sum_{n=0}^{\infty} f(k+i, n) z_2^{-n}$;

(iii) $\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{l-1} f(k+i, n) z_1^{-i} z_2^{-n} = z_1^{k}\left(\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{l-1} f(m,n) z_1^{-m} z_2^{-n} - \sum_{m=0}^{k-1}\sum_{n=0}^{l-1} f(m,n) z_1^{-m} z_2^{-n}\right)$;

(iv) $\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{l-1} f(m,n) z_1^{-m} z_2^{-n} = \sum_{i=0}^{l-1} F(z, i) z_2^{-i}$, 其中 $F(z, n) = \sum_{m=0}^{\infty} f(m,n) z_1^{-n}$.

(v) $Z(f(m+k, n+l))$

$$= z_1^k z_2^l \left(F(z_1, z_2) - \sum_{m=0}^{k-1} F(m, z_2) z_1^{-m} - \sum_{n=0}^{l-1} F(z_1, n) z_2^{-n} + \sum_{m=0}^{k-1}\sum_{n=0}^{l-1} f(m,n) z_1^{-m} z_2^{-m}\right).$$

3 方程(1. 1)的解振动的充分必要条件

容易看到

$$Z(A_{mn}) = \sum_{m,n=0}^{\infty} A_{mn} z_1^{-m} z_2^{-n} = F(z_1, z_2), \tag{3.1}$$

又从引理(2.2)还得到

$$Z(A_{m-k_i,n-l_i}) = z_1^{-k_i} z_2^{-l_i} F(z_1, z_2), \tag{3.2}$$

$$Z(A_{m,n+1}) = z_2(F(z_1, z_2) - F(z_1, 0)), \tag{3.3}$$

$$Z(A_{m+1,n}) = z_1(F(z_1, z_2) - F(0, z_2)). \tag{3.4}$$

考虑方程(1.1)的特征方程

$$\lambda + (a - 1)\mu - (p + a) + \sum_{i=1}^{u} q_i \lambda^{-k_i} \mu^{-l_i} = 0. \tag{3.5}$$

有下列结论

定理3.1 设(1.2)成立, 则方程(1.1)的每一个解振动的充分必要条件是它的特征方程(3.5)没有正的根

证明 必要性 若方程(1.1)的每一个解是振动的, 此时它的特征方程(3.5)不会有正的根, 否则若 λ_0, μ_0是(3.5)的正根, 则$A_{mn} = \lambda_0^m \mu_0^n$是方程(1.1)的非振动解, 这矛盾

充分性 设特征方程(3.5)没有正的根, 并设$\{A_{mn}\}$是方程(1.1)的满足初始值$\{\varphi_{mn}\}$的正解序列, 其中$|\varphi_{mn}| < c$, 则利用数学归纳法易求得存在$d > 0, c > 0$使得$|A_{mn}| < dc^{m+n}$, $(m, n) \in N_0^2$, 因此从引理2.1, 对于$|z_i| > c$, $i = 1, 2$序列$\{A_{mn}\}$的Z变换存在, 即

$$Z(A_{mn}) = F(z_1, z_2) = \sum_{m,n=0}^{\infty} A_{mn} z_1^{-m} z_2^{-n} \tag{3.7}$$

存在, 以下利用引理2.2, 对于方程(1.1)的两边进行Z变换, 得到

$$\left(z_1 + (a-1)z_2 - (p+a) + \sum_{i=1}^{u} q_i z_1^{-k_i} z_2^{-l_i}\right) F(z_1, z_2) = z_1 F(0, z_2) + z_2 F(z_1, 0). \tag{3.8}$$

令$\varphi(z, z_2) = z_1 + (a - 1)z_2 - (p + a) + \sum_{i=1}^{u} q_i z_1^{-k_i} z_2^{-l_i}$, $\psi(z_1, z_2) = z_1 F(0, z_2) + z_2 F(z_1, 0)$, 则(3.8)可以改写为

$$\varphi(z_1, z_2) F(z_1, z_2) = \psi(z_1, z_2). \tag{3.9}$$

亦即

$$\varphi\left(\frac{1}{z_1}, \frac{1}{z_2}\right) F\left(\frac{1}{z_1}, \frac{1}{z_2}\right) = \psi\left(\frac{1}{z_1}, \frac{1}{z_2}\right). \tag{3.10}$$

令$w(z_1, z_2) = F\left(\frac{1}{z_1}, \frac{1}{z_2}\right) = \sum_{m,n=0}^{\infty} A_{mn} z_1^m z_2^n$, 由假设条件知$w(z_1, z_2)$的系数$A_{mn} > 0$, 而且有正项系数的幂级数具有正的收敛半径$r_i$, $i = 1, 2$, 故$w(z_1, z_2)$在双圆柱区域$|z_i| < r_i$上收敛, 即(3.10)在双圆柱型区域$|z_i| < r_i$上收敛, 这等价于(3.9)在区域$|z_i| > \frac{1}{r_i}$上成立, 又注意对于正项系数的幂级数$w(z_1, z_2)$在收敛半径上至少有一个奇点, 从条件对于$(z_1, z_2) \in (0, \infty) \times (0, \infty)$有$\varphi(z_1, z_2) \neq 0$, 从而对于$r_i$, $i = 1, 2$也有$\varphi\left(\frac{1}{r_1}, \frac{1}{r_2}\right) \neq 0$, 则(3.10)化为

$$w(z_1, z_2) = \left(\psi\left(\frac{1}{z_1}, \frac{1}{z_2}\right)\right) \Big/ \left(\varphi\left(\frac{1}{z_1}, \frac{1}{z_2}\right)\right), \tag{3.11}$$

而$w(z_1,z_2)$在区域$|z_i-r_i|<\rho_i$, $i=1,2$上是解析的, 这与$w(z_1,z_2)$在$z_i=r_i$上有本性奇点相矛盾, 因此必须有$r_i=\infty$, $i=1,2$, 从而(3.9)在$|z_i|>0$上成立, 而这又导致对于充分大的m,n有$A_{mn}=0$, 否则(3.9)的左边不等于右边, 这矛盾.

从定理3.1得到下面的结论

定理3.2 设

(i) $0<a<1$, $q_i\in(0,\infty)$, l_i是一个偶数, $i=1,2,\cdots,u$; (3.12)

(ii) $\sum_{i=1}^{u} q_i \frac{((a-1)(k_i+1)-l_i)^{k_i+l_i+1}}{(a-1)^{k_i+1}(p+a)^{k_i+1}k_i^{k_i}}>1$, (3.13)

则方程(1.1)的每一个解是振动的.

证明 在(3.12), (3.13)下, 证(3.5)没有正的根, 显然对于$\lambda+(a-1)\mu>p+a$时, (3.5)没有正的根, 对于$0<\lambda+(a-1)\mu<p+a$时, 设(3.5)的左端为$\varphi(\lambda,\mu)$, 则有

$$\varphi(\lambda,\mu)=((p+a)-\lambda-(a-1)\mu)\left(-1+\sum_{i=1}^{u} q_i\frac{\lambda^{-k_i}\mu^{-l_i}}{(p+a)-\lambda-(a-1)\mu}\right)$$

令$f_i(\lambda,\mu)=\frac{\lambda^{-k_i}\mu^{-l_i}}{(p+a)-\lambda-(a-1)\mu}$, 求$\frac{\partial f_i}{\partial\lambda}=0$, $\frac{\partial f_i}{\partial\mu}=0$, 得到

$$\lambda_0=\frac{(a-1)k_i(p+a)}{(a-1)(k_i+1)-l_i},\quad \mu_0=\frac{l_i(p+a)}{(a-1)(k_i+1)-l_i}$$

$$\left(\left(\frac{\partial^2 f_i}{\partial\lambda\partial\mu}\right)^2-\frac{\partial^2 f_i}{\partial\lambda^2}\cdot\frac{\partial^2 f_i}{\partial\mu^2}\right)\Big|_{(\lambda_0,\mu_0)}=\omega^2\left(-\frac{k_i+l_i+1}{k_i+l_i}(a-1)^2-\frac{k_i+1}{k_i}a(1-a)\right),$$

其中$\omega^2=\left(\frac{(a-1)(k_i+1)-l_i}{(a-1)(p+a)}\right)^3\lambda_0^{-k_i}\mu_0^{-l_i}$. 并且从(3.12), (3.13)利用二元函数的极值判别法易求得$\min\limits_{0<\lambda+(a-1)\mu<p+a} f_i(\lambda,\mu)=f_i(\lambda_0,\mu_0)=\frac{((a-1)(k_i+1)-l_i)^{k_i+l_i+1}}{(a-1)^{k_i+1}(p+a)^{k_i+1}k_i^{k_i}}$, 因此对于$0<\lambda+(a-1)\mu<p+a$, 有

$$\varphi(\lambda,\mu)\geq((p+a)-\lambda-(a-1)\mu)\left(-1+\sum_{i=1}^{u} q_i\frac{((a-1)(k_i+1)-l_i)^{k_i+l_i+1}}{(a-1)(p+a)^{k_i+1}k_i^{k_i}}\right)>0,$$

从而(3.5)没有正的特征根, 从定理3.1, 则方程(1.1)的每一个解是振动的.

同样当$a=0$时, 也可以得到相应的结果, 在此不再赘述.

对于定理3.2利用几何平均值和算术平均值不等式, 还可以得到下列推论:

推论 设(i) $0<a<1$, $q_i\in(0,\infty)$, l_0是一个偶数, $i=1,2,\cdots,u$.

(ii) $u\left(\prod_{i=1}^{u} q_i\right)^{\frac{1}{u}}\frac{((a-1)(k_0+1)-l_0)^{k_0+l_0+1}}{(a-1)^{k_0+1}(p+a)^{k_0+1}k_0^{k_0}}>1$,

则方程(1.1)的每一个解是振动的. 其中$k_0=\frac{1}{u}\sum_{i=1}^{u}k_i$, $l_0=\frac{1}{u}\sum_{i=1}^{u}l_i$.

作为应用最后看一个例子, 考虑方程

$$A_{m+1,n}-\frac{1}{2}A_{m,n+1}-A_{mn}+\frac{5}{2}A_{m-2,n}=0 \tag{3.14}$$

由于$a=\frac{1}{2}$, $p=\frac{1}{2}$, $k_1=2$, $l_1=0$, $q_1=\frac{5}{2}$, 易见定理3.2的全部条件满足, 从而方程(3.14)的每一个解都是振动的, 事实上$\{A_{mn}\}=\{(-1)^m\}$即是这样的一个解.

参 考 文 献

[1] Erbe L H and Zhang B G. *Oscillation of discrete analogues of duelay equations, in proceedings* [C]. International Conference on Theory and Applications of Differential Equations, Ohio University, March 21- 25, 1888, New York, in press

[2] Gyori I and Ladas G. *Oscillation Theory of Delay Difference Equation with Applications* [M]. Clarehdon Press, Oxford, 1991.

[3] Zhang B G, Liu S T and Cheng S S. *Oscillation of class of delay partial difference equations* [J]. J. Equations and its Applications, 1995, **1**: 215- 226.

[4] Zhang G and Liu S T. *Oscillation of partial difference equations* [J]. Pan AmericarMath. J., 1995, **5** (2): 61- 70.

[5] Liu S T and Cheng S S. *Exrstesce of positive solution for partial difference a equations* [J]. Far East JournalMathematical Science, 1997, **5**(3): 387- 392.

[6] Liu S T, Cheng S S. *Nonexistence of positive solutions of a nonlinear partial difference equation* [J]. Tamkang Journal of Mathematics, 1997, **28**(1): 51- 58.

[7] Zhang B G and Liu S T. *On the oscillation of partial difference equations* [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1997, **206**: 480- 492.

[8] Liu S T, Zhang B G. *Oscillation of a class of partial difference equations* [J]. Panamericam Mathematical Journal, 1997, **7**(3): 71- 77.

[9] Zhang B G and Liu S T. *Necessary and sufficient conaition for oscillation of delay partial difference equations* [J]. DiscussicsMathematicesDifferential-Inclasions, 1995, **15**: 213- 219.

[10] **李向平. 分子轨道的偏差分方程法** [J]. **化学学报**, 1982, **40**(8): 688- 698.

[11] **汤国熙. Z 变换理论与应用** [M]. **北京: 宇航出版社**, 1988, 9.

Oscillation of Hyperbolic Type Delay Partial Difference Equation

Liu Shutang

(Dept. of Math., Binzhou Normal College, Shangdong 256604)

Abstract

This paper is concerned with the hyperbolic type delay partial difference equations

$$A_{m+1,n} + (a - 1)A_{m,n+1} - (p + a)A_{mn} + \sum_{i=1}^{u} q_i A_{m-k_i, n-l_i} = 0, \quad \text{(E)}$$

where $a - 1 \neq 0$, $p + a > 0$, q_i are real numbers, k_i and l_i are nonnegative integers, $i = 1, 2, \cdots, u$, u is a positive integer. Necessary and sufficient conditions and criteria for all solutions of (E) to be oscillatory are obtained.

Keywords delay partial, difference equation, oscillation, characteristic equation.