第19卷 增刊 数学研究与评论 Vol. 19 Supp
1999年4月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Apr. 1999

关于一类一阶非线性常微分方程解空间的显易结构*

张 玉 明
(辽宁商业高等专科学校企管系, 锦州121013)

摘 要: 文章以定理1.1为基础, 引入标准可积方程的概念, 进而根据已知方程 $w' = \sum_{i=0}^{n} a_i(z) w^i(z)$ 的 $n+1$ 个系数, 给出了该方程解空间具有显易结构的判别准则. 一方面, 根据该准则, 可以对该类非线性常微分方程解空间结构作出显易结构的判定, 从而可以对其解空间进行定性解析分析; 另一方面, 该准则可以作为判定该类非线性常微分方程在复域上能否变量分离之准则.

关键词: 解空间, 标准可积方程, 显易结构.
分类号: AMS(1991) 34B15/CLC O175.14
文献标识码: A **文章编号**: 1000-341X(1999)增刊-0282-05

1 引言及主要定理

对于非线性常微分方程

$$w' = \sum_{i=0}^{n} a_i(z) w^i(z), \tag{1.1}$$

其中 $a_i(z) \in C(D)$; $\forall z \in D$, $a_n(z) \neq 0$, D 是复平面上某一连通开集. 当 $n \geq 2$ 时, 一般不能用初等方法求解. 然而, 类似于线性常微分方程, 它们的解空间也是由若干不同的特解非线性地生成.

文[1, 3]给出了方程(1.1)解空间具有显易结构的条件:

定理1.1[1] 方程(1.1)解空间具有显易结构的充要条件是存在 $D'(\subset D)$ 上的解析函数 $f(z)$ 与 $g(z)$, $f(z) \neq 0$, $\forall z \in D'$, 使得经线性变换 $w = f(z)\theta + g(z)$, 方程(1.1)可以化为

$$\theta' = \alpha(z) \prod_{i=1}^{n} [\theta(z) - \alpha_i] = \alpha(z)(\theta^n + c_1\theta^{n-1} + \cdots + c_n), \tag{1.2}$$

其中 $\alpha_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ 为 n 个复数.

定理1.2[3] 方程(1.1)解空间具有第一类显易结构的充要条件是存在 n 个非零的常数 λ_i 及 n 个互不相同的特解 $w_i(z)$, 它们满足以下 $n-1$ 个等式:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i w_i^j(z) = 0 \quad (j = 0, 1, 2, \cdots, n-2). \tag{1.3}$$

* 收稿日期: 1996-04-25; 修订日期: 1998-06-12
作者简介: 张玉明(1963-), 男, 河南玉田县人, 硕士, 现为辽宁商业高等专科学校副教授.

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

在定理1.1中, 如何实现这个变换, 以及能否直接根据已知方程(1.1)的 $n+1$ 个系数, 对方程(1.1)解空间显易结构的存在性作出判别, 是未知的. 然而我们通过对方程(1.1)与方程(1.2)系数的研究得到了下述主要结果.

已给方程(1.1), 定义函数:

$$g(z)=-\frac{a_{n-1}(z)}{na_n(z)},$$

$$F_i(z)=\sum_{j=0}^{i}c_{n-j}^{i-j}a_{n-j}(z)g^{i-j}(z)-\delta_{n-1}^{i}\frac{f'(z)}{f(z)}-\delta_n^{i}g'(z)\quad(i=1,2,\cdots,n),\tag{1.4}$$

其中: δ_{n-1}^{i}, δ_n^{i} 为 Kronecker 记号, 函数 $f(z)$ 待定.

研究函数列 $F_1(z), F_2(z), \cdots, F_{n-2}(z), F_n(z)$.

(i) 如果此函数列在 D' 上不全为零函数, 则可设 $F_k(z)$ 为此函数列中下标号最小的非零函数(显然 $k\geq 2$), 定义

$$f(z)=\left[\frac{F_k(z)}{a_n(z)}\right]^{\frac{1}{k}},\tag{1.5}$$

$$\beta^*(z)=a_n(z)f^{n-1}(z),\tag{1.6}$$

$$s_j^*=\begin{cases}0, & j=1,2,\cdots,k-1,\\ \dfrac{F_j(z)}{a_n(z)f^j(z)}, & j=k,k+1,\cdots,n;\end{cases}\tag{1.7}$$

(ii) 如果此函数列在 D' 上均为零函数, 取 $g(z)=-\dfrac{a_{n-1}(z)}{na_n(z)}$, $f(z)$ 为 D' 上任何无零点的解析函数, 则方程(1.1)在线性变换 $w=f(z)\sigma+g(z)$ 下, 化为 Bernoulli 方程:

$$\sigma'=a_n(z)f^{n-1}(z)\sigma^n+F_{n-1}(z)\sigma\tag{1.8}$$

由此得到下面的主要定理:

定理1.3 当 $n\geq 3$ 时, 方程(1.1)解空间具有显易结构的充要条件是: 或者 $s_j^*(z)$ $(j=k,k+1,\cdots,n)$ 均为常数(情况 i); 或者 $F_1(z), F_2(z), \cdots, F_{n-2}(z), F_n(z)$ 在 D' 上均为零函数(情况 ii).

为了证明这个定理, 需要如下引理.

2 基本引理

设方程

$$\sigma'=\beta(z)(\sigma^n+s_1\sigma^{n-1}+s_2\sigma^{n-2}+\cdots+s_{n-1}\sigma+s_n),\tag{2.1}$$

其中 $s_1, s_2, \cdots, s_n$ 均为常数.

定义 如果方程(2.1)具有如下性质: 或者 $s_1=s_2=\cdots=s_{k-1}=0$, $s_k=1$ $(k\geq 2$, 且 $k\neq n-1)$; 或者 $s_i=0$ $(i=1,2,\cdots,n-2,n)$, 则称方程(2.1)为标准可积方程.

为了证明定理1.3, 引入如下引理:

引理2.1 任意一形如(1.2)的方程都可以经过线性变换化为标准可积方程.

引理2.2 方程(1.1)的解空间具有显易结构的充要条件是: 存在 $D''(\subset D')$ 上的解析函数 $f(z)$ 与 $g(z)$, $f(z)\neq 0$, $\forall z\in D''$, 使得经线性变换 $w=f(z)\theta+g(z)$, 方程(1.1)化为标准可积

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

方程

引理2.3 在情况(i)下, 如果方程(1.1)解空间具有显易结构, 则存在唯一一个线性变换, 把方程(1.1)化为标准可积方程

3 引理及定理的证明

引理2.1的证明 定义 $b=-\frac{c_1}{n}$, 则或者 $s_i=c_n^i b^i+c_1c_{n-1}^{i-1}b^{i-1}+\cdots+c_i\neq 0\ (i=1,2,\cdots,n-2,n)$ (情况1); 或者 $s_i=c_n^i b^i+c_1c_{n-1}^{i-1}b^{i-1}+\cdots+c_i=0\ (i=1,2,\cdots,n-2,n)$ (情况2).

设线性变换 $\sigma=a\theta+b\ (a\neq 0, b$ 为常数), 情况1时只要取

$$a=\sqrt[i]{c_n^i b^i+c_1c_{n-1}^{i-1}b^{i-1}+\cdots+c_i},\quad b=-\frac{c_1}{n}.$$

那么在该线性变换下, 方程(1.2)化为标准可积方程; 在情况2下, a 可以取任意非零常数, $b=-\frac{c_1}{n}$, 那么在该线性变换下, 方程(2.1)化为标准可积方程. 证毕.

引理2.2的证明 由定理1.1及引理2.1便可以得到引理2.2的结论.

引理2.3的证明 存在性由引理2.2可知, 唯一性的证明见[5].

最后证明定理1.3. 先证明必要性: 设线性变换

$$w=f(z)\sigma+g(z). \tag{3.1}$$

把变换(3.1)代入到方程(1.1)中得:

$$\sigma^{p}=\beta^*(z)[\sigma^p+s_1^*(z)\sigma^{p-1}+s_2^*(z)\sigma^{p-2}+\cdots+s_{n-1}^*(z)\sigma+s_n^*(z)], \tag{3.2}$$

其中

$$\beta^*(z)=a_n(z)f^{n-1}(z), \tag{3.3}$$

$$s_j^*=\frac{F_j(z)}{a_n(z)f^j(z)}\quad (j=1,2,\cdots,n). \tag{3.4}$$

由引理2.2得: 或者情况(i), 则有

$$f(z)=\left[\frac{F_k(z)}{a_n(z)}\right]^{\frac{1}{k}},\quad g(z)=-\frac{a_{n-1}(z)}{na_n(z)},$$

且 $F_1(z)=F_2(z)=\cdots=F_{k-1}(z)=0$, 而

$$s_j^*(z)=\begin{cases}0, & j=1,2,\cdots,k-1;\\ \dfrac{F_j(z)}{a_n(z)f^j(z)}, & j=k,k+1,\cdots,n,\end{cases}$$

在已知条件下, $s_j^*(z)$ 必全为常数.

若不然, 由引理2.3知, 不存在其它的变换把方程(1.1)化为标准可积方程, 即方程(1.1)的解空间不具有显易结构, 这与已知条件相矛盾, 因此 $s_j^*(z)$ 必全为常数.

或者情况(ii), 则 $g(z)=-\frac{a_{n-1}(z)}{na_n(z)}$, $f(z)$ 为 D' 上任何无零点的解析函数, 且 $F_1(z)=F_2(z)=\cdots=F_{n-2}(z)=F_n(z)=0$. 必要性证毕.

下面证明充分性:

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

情况(i), 线性变换 $w=\left[\frac{F_k(z)}{a_n(z)}\right]^{\frac{1}{k}}\sigma-\frac{a_{n-1}(z)}{na_n(z)}$, 把方程(1.1)化为

$$\sigma'=\beta^*(z)(\sigma^n+s_k^*\sigma^k+s_{k+1}^*\sigma^{k+1}+\cdots+s_{n-1}^*\sigma+s_n^*), \tag{3.5}$$

其中 $s_j^*(z)=\frac{F_j(z)}{a_n(z)f^j(z)}(j=k,k+1,\cdots,n)$ 均为常数. 由代数方程的基本定理, 方程(3.5)可以化为如下形式:

$$\sigma'=\beta^*(z)\prod_{j=1}^{n}[\sigma(z)-\sigma_j], \tag{3.6}$$

其中 $\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n$ 为代数方程

$$\sigma^n+s_k^*\sigma^k+s_{k+1}^*\sigma^{k+1}+\cdots+s_{n-1}^*\sigma+s_n^*=0 \tag{3.7}$$

的 n 个复根.

当诸 σ_i 均不相同时, 方程(1.1)有第一类显易结构的通解:

$$G(z)\prod_{i=1}^{n}[\sigma(z)-\sigma_i]^{\lambda_i}\equiv \mathrm{Const}, \tag{3.8}$$

其中 $G(z)=\exp\{-\int\beta^*(z)\mathrm{d}z\}$, $\lambda_i(i=1,2,\cdots,n)$ 均为常数.

当诸 σ_i 有相同者时, 方程(1.1)有第二类显易结构的通解:

$$G(z)\exp\{R(z)\prod_{i=1}^{s}[\sigma(z)-\sigma_i\}^{\lambda_i}\equiv\mathrm{Const}^{[3]}, \tag{3.9}$$

其中 $G(z)=\exp\{-\int\beta^*(z)\mathrm{d}z\}$, $R(z)$ 为有理函数, $\lambda_i(i=1,2,\cdots,s)$ 均为常数.

情况(ii) $g(z)=-\frac{a_{n-1}(z)}{na_n(z)}$, $f(z)$ 为 D' 上任意无零点的解析函数, 则在该线性变换下, 方程(1.1)化为Bernoulli方程:

$$\sigma'=a_n(z)f^{n-1}(z)\sigma^n+F_{n-1}(z)\sigma, \tag{3.10}$$

而Bernoulli方程有第一类显易结构的通解:

$$G(z)\sigma^{1-n}[\sigma^{n-1}(z)-\sigma_1^{n-1}(z)]\equiv\mathrm{Const}^{[2]}, \tag{3.12}$$

其中权为 $\{1-n,1,\cdots,1\}$ 而

$$\sigma_1(z)=\exp[\int F_{n-1}(z)\mathrm{d}z]\{(n-1)\int a_n(z)f^{n-1}(z)\cdot\exp[(n-1)\int F_{n-1}(z)\mathrm{d}z]\mathrm{d}z\}^{\frac{1}{n-1}}$$

$$G(z)=(n-1)\int a_n(z)f^{n-1}(z)\exp[(n-1)\int F_{n-1}\mathrm{d}z]\mathrm{d}z \tag{3.14}$$

综上所述, 证明了无论是情况 i, 还是情况 ii, 方程(1.1)解空间都具有显易结构. □

感谢导师管克英教授给予的热情指导和帮助.

参 考 文 献

[1] Guan Keying. *On strucure of solution spaces of some nonlinear ordinary differential equations* [C]. Proc, of 3-rd Seminar On Differential Equations, (1990). Poznan.

[2] 秦元勋. 常微分方程定义的积分曲面 [M]. 西安: 西北大学出版社, 1985.

[3] 李美生. 非线性常微分方程 $y'=\sum_{i=0}^{n}a_i(z)y^i(z)$ 解空间的显易结构 [J]. 北京航空航天大学学报,

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

1989, **4**: 81- 87.

[4] Guan Keying. *On representing the general solution with the special solutions for the differential equtions* $y' = \sum_{i=0}^{n} a_i(z) y^i(z)$ [J]. Joural of Mathematical Reserch and Exposition, 1983, **3**(1): 115- 116.

[5] 张玉明, 管克英. 非线性常微分方程 $w' = \sum_{i=0}^{n} a_i(z) w^i(z)$ 的显化问题 [C]. 常微分方程复定性理论学术会议论文集, 1991.

On Explicit Structure of Solution Space of a Class of the First Order Nonlinear Ordinary Differential Equation

Zhang Yuming

(Liaoning Commercial College)

Abstract

In this paper, the concept of the canonical integrable equation is introduced. A criterion is given involving the $n+1$ coefficient of a given equation $w' = \sum_{i=0}^{n} a_i(z) w^i(z)$ that the solution space of the equation has an explicit structure. According to this criterion, it can be judged that the solution space of this class of nonlinear differential equiation has an explicit or implicit strctrure, therefore, an analytic qualitative analyese can be made on it. Moreover, this criterion can be used to determine whether the class of nonlinear differential equation can be integrated by separation of variables in the complex domain or not.

Keywords solution space, canonical integrable equation, explicit structure.

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.