第19卷 增刊
1999年4月
数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION
Vol. 19 Supp
Apr. 1999

高阶中立型微分方程的周期解*

张 广
(大同高等专科学校, 山西037008)

摘 要: 本文采用 Fourier 级数理论, 获得了任意阶常系数中立型微分方程周期解存在性和唯一性的充分必要条件.

关键词: 中立型微分方程, 周期解, Fourier 级数
分类号: AMS(1991) 34C10/CLC O175.12
文献标识码: A **文章编号**: 1000-341X(1999)增刊-0287-04

关于二阶中立型微分方程

$$[x(t)+cx(t-h)]''+px(t-h)=f(t) \tag{1}$$

周期解的存在性和唯一性, 文[1]和[2]的作者们最近已给出研究, 并且获得了一些好的结果. 本文将讨论更一般的方程

$$[x(t)+cx(t-h)]^{(m)}+px(t-h)=f(t) \tag{2}$$

其中 p, c 是实数, h 为非负实数, $f(t)$ 是连续可微的 2π 周期函数, m 是自然数或奇或偶.

首先扩充了文[2]的主要结果, 同时也得到了更加深刻的判据. 有一些结论即使退化到方程(1)也是新的.

方程(2)的一个解是 R 上直到 m 阶连续导数且满足方程(2)的函数.

设 $f(x)$ 的 Fourier 展式为

$$f(t)=k_0+\sum_{n=1}^{m}(k_n\cos nt+d_n\sin nt)$$

其中 k_0, k_n 和 d_n 是 $f(t)$ 的 Fourier 系数.

定理1 设 $|c|\neq 1$, 则方程(2)存在 2π 周期解的充分必要条件是: 对一切自然数 n, 代数方程

$$pb_0=k_0,\ p_nb_n+q_nl_n=k_n,\ -q_nb_n+p_nl_n=d_n \tag{3}$$

关于 b_0, b_n 和 l_n 有解. 其中

$$p_n=n^m\left(\cos\frac{m\pi}{2}+c\sin\frac{m\pi}{2}\sin nh+c\cos\frac{m\pi}{2}\cos nh\right)+p\cos nh,$$

$$q_n=n^m\left(\sin\frac{m\pi}{2}+c\sin\frac{m\pi}{2}\cos nh-c\cos\frac{m\pi}{2}\sin nh\right)-p\sin nh.$$

证明 必要性 设 $x(t)$ 为(2)的 2π 周期解, 其 Fourier 展式为

* 收稿日期: 1996-11-04
作者简介: 张 广(1962-), 男, 山西省大同市人, 学士, 现为大同高等专科学校副教授.

$$x(t)=b_0+\sum_{n=1}^{\infty}(b_n\cos nt+l_n\sin nt).$$

则有

$$x(t-h)=b_0+\sum_{n=1}^{\infty}[(b_n\cos nh-l_n\sin nh)\cos nt+(b_n\sin nh+l_n\cos nh)\sin nt] \tag{4}$$

$$x^{(m)}(t)=\sum_{n=1}^{\infty}n^m[(b_n\cos\frac{m\pi}{2}+l_n\sin\frac{m\pi}{2})\cos nt+(l_n\cos\frac{m\pi}{2}-b_n\sin\frac{m\pi}{2})\sin nt] \tag{5}$$

$$x^{(m)}(t-h)=\sum_{n=1}^{\infty}n^m\{[(b_n\cos\frac{m\pi}{2}+l_n\sin\frac{m\pi}{2})\cos nh-(l_n\cos\frac{m\pi}{2}+b_n\sin\frac{m\pi}{2})\sin nh]\cos nt+$$
$$[(b_n\cos\frac{m\pi}{2}+l_n\sin\frac{m\pi}{2})\sin nh+(l_n\cos\frac{m\pi}{2}-b_n\sin\frac{m\pi}{2})\cos nh]\sin nt\}. \tag{6}$$

将(4), (5)**和**(6)**代入**(2)**式,比较系数则知**(3)**式成立**

充分性 **如果**(3)**关于** b_0, b_n **和** l_n **有解,构造级数**

$$b_0+\sum_{n=1}^{\infty}(b_n\cos nt+l_n\sin nt), \tag{7}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^i[(b_n\cos\frac{i\pi}{2}+l_n\sin\frac{i\pi}{2})\cos nt+(l_n\cos\frac{i\pi}{2}-b_n\sin\frac{i\pi}{2})\sin nt],\ 1\le i\le m. \tag{8}$$

注意到

$$p_n^2+q_n^2=n^{2m}(1+c^2+2c\cos nh)+2pn^m\cos(\frac{m\pi}{2}+nh)+2pch^m\cos\frac{m\pi}{2}+p^2. \tag{9}$$

则有

$$p_n^2+q_n^2\ge n^{2m}(1-|c|)^2+2pn^m\cos(\frac{m\pi}{2}+nh)+2pch^m\cos\frac{m\pi}{2}+p^2.$$

因 $|c|\ne1$, **所以有** $\epsilon>0$**和** N **使得** $n\ge N$ **时有**

$$p_n^2+q_n^2\ge\epsilon n^{2m}.$$

另由(3)**可知**

$$(p_n^2+q_n^2)b_n=p_nk_n-q_nd_n,\quad (p_n^2+q_n^2)l_n=q_nk_n+p_nd_n.$$

则有

$$\sqrt{\epsilon}n^m(|b_n|+|l_n|)\le\sqrt{p_n^2+q_n^2}(|b_n|+|l_n|)=\frac{|p_nk_n-q_nd_n|+|q_nk_n+p_nd_n|}{\sqrt{p_n^2+q_n^2}}$$
$$\le2(|k_n|+|d_n|),\ n\ge N.$$

而

$$|k_n|+|d_n|=\frac{1}{n}(|nk_n|+|nd_n|)\le\frac{1}{2n^2}+(|nk_n|^2+|nd_n|^2).$$

即有

$$\sqrt{\epsilon}n^m(|b_n|+|l_n|)\le\frac{1}{n^2}+2(|nk_n|^2+|nb_n|^2),\ n\ge N.$$

由于 nk_n, nb_n **是** $f'(t)$**的** Fourier **系数,由**Bessel **不等式,有**

$$\sum_{n=N}^{M}(|nk_n|^2+|nd_n|^2)\le\frac{1}{\pi}\int_{\pi}[f'(t)]^2dt,\ M\ge N.$$

故 $\sum_{n=N}^{\infty}(|nk_n|^2+|nd_n|^2)$ 收敛 又因 $\sum_{n=N}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛, 从而可知 $\sum_{n=1}^{\infty}n^m(|b_n|+|l_n|)$ 收敛 即知(7) 和(8) 是绝对收敛和一致收敛的 令

$$x(t)=b_0+\sum_{n=1}^{\infty}(b_n\cos nt+l_n\sin nt),$$

它显然是(2) 的 2π 周期解 □

注 1 当 $m=2$ 时, 文[1] 和[2] 的作者并未证明 $\sum_{n=1}^{\infty}n^2(b_n\cos nt+l_n\sin nt)$ 的收敛性

由定理1, 显知如下结论

定理2 $|c|\neq 1, p\neq 0$, 则方程(2) 有唯一 2π 周期解的充要条件是

$$n^{2m}(1+c^2+2c\cos nh)+2pn^m\cos\left(\frac{m\pi}{2}+nh\right)+2pcn^m\cos\frac{m\pi}{2}+p^2\neq 0$$

对所有自然数成立

定理3 $|c|\neq 1, p\neq 0$, 则方程(2) 有唯一 2π 周期解的充要条件是: 对所有自然数 n, 当 m 是奇数时

$$n^{2m}(1+c^2+2c\cos nh)+2pn^m(-1)^{\frac{m+1}{2}}\sin nh+p^2\neq 0;$$

当 m 是偶数时

$$n^{2m}(1+c^2+2c\cos nh)+2pn^m(-1)^{\frac{m+1}{2}}(c+\cos nh)+p^2\neq 0.$$

注2 定理2和定理3给出了简洁的表达式 因此, 利用定理2或定理3对具体问题, 会得到快速判别 比[1]和[2]中定理更为方便

当 $h=2\lambda\pi$(λ 是非负整数) 时,

$$p_n^2+q_n^2=\begin{cases}n^{2m}(1+c)^2+p^2, & m \text{ 是奇数}\\ n^{2m}(1+c)^2+2pn^m(-1)^{\frac{m}{2}}(1+c)+p^2, & m \text{ 是偶数}\end{cases}$$

由定理1的证明, 可知如下结果

定理4 $c\neq -1, h=2\lambda\pi$, 则方程(2) 有唯一 2π 周期解的充要条件: 当 m 是奇数时是 $p\neq 0$; 当 m 是偶数时是 $p\neq 0$ 且 $n^{2m}(1+c)^2+2pn^m(-1)^{\frac{m}{2}}(1+c)+p^2\neq 0$.

注3 当 $c=1$ 时, [1]和[2]的结果无法判别方程(1).

例1 考虑方程

$$[x(t)+x(t-2\pi)]''-4x(t-2\pi)=-6\sin t \tag{10}$$

显然它满足定理4, 所以方程(10) 有唯一 2π 周期解 事实上, $x(t)=\sin t$ 就是(10) 的 2π 周期解 但是, (10) 无法用[1]和[2]中的定理判别

注4 我们的所有定理同时也满足奇数阶方程 所以, 对[1]和[2]的结果作了相当的扩充和改进

例2 考虑方程

$$[x(t)+x(t-2\pi)]'-x(t-2\pi)=2+2\cos t+\sin t \tag{11}$$

由定理4即知(11) 有唯一 2π 周期解 事实上, $x(t)=2+\sin t$ 就是(11) 的 2π 周期解

注5 $c=-1$ 时, 方程(2) 也可能存在 2π 周期解

例3　考虑方程

$$[x(t)-x(t-\pi)]''+3x(t-\pi)=-2\sin t-3\cos t \tag{12}$$

和

$$[x(t)-x(t-\pi)]'''+4x(t-\pi)=-6\sin t \tag{13}$$

分别有2π周期解 $\cos t$ 和 $\sin t$.

注6　当 $f(t)$ 以 T 为周期时, 可类似讨论.

注7　利用本文方法, 可以研究更一般的方程

$$[x(t)+cx(t-\tau)]^{(m)}+\sum_{i=0}^{m-1}c_i x^{(i)}(t-\tau)+qx(t)=f(t).$$

这里省略.

本文是作者在青岛海洋大学应用数学系访问期间完成, 受益于张炳根教授的精心指导, 特表感谢.

参　考　文　献

[1]　章毅, 张毅. 关于二阶常系数线性中立型方程的周期解 [J]. 数学学报, 1990, **4**: 517- 520.

[2]　王根强. 二阶中立型方程的周期解 [J]. 高校应用数学学报A 辑, 1993, **3**: 251- 254.

Perionic Solutions of Higher-Order Neutral Differential Equations

Zhang Guang

(Dept. of Math., Datong Advanced College, Shanxi 037008)

Abstract

In this paper, some necessary and sufficient conditions are obtained for existence and uniqueness for periodic solutions of neutral differential equations.

Keywords　neutral differential equation, periodic solution, fourier series