关于模的最大有理扩张*

卢 丹 诚
(河海大学机械学院基础部, 江苏常州213022)

摘 要: i) 设M_i为一族左R-模, 记$\overline{M}_i$为M_i的最大有理扩张, 本文首先考察了$\sum\oplus\overline{M}_i$和$\overline{\sum\oplus M_i}$之间的关系, 并证明了如对环$R$上任何一族模上述两者相等的充要条件是环$R$上每一个模都有理完全. ii) 利用i)研究了无零因子环上模的最大有理扩张, 得到了一些结果.

关键词: 最大有理扩张, 幂等滤子.
分类号: AMS(1991) 16D40, 16D80/CCL O153.3
文献标识码: A **文章编号**: 1000-341X(1999)增刊-0295-04

1 预备知识

设A, B, C为三个左R-模, 且$A\subseteq B$, 如果对A, B之间任何一个模C($A\subseteq C\subseteq B$), 以及任意$\varphi\in\mathrm{Hom}(C, M)$, $\varphi(A)=0$总蕴含着$\varphi(C)=0$, 则A, B, C之间这种关系记为$A\leq B(M)$, 特别地: $M=B$即$A\leq B(B)$时, 称B为A的有理扩张(rational extension). 有理扩张只能是自身的模, 称为有理完全模, 也称有理闭模. 对任何一个模A, 都有一个同构意义下唯一的最大有理扩张, 记为$\overline{A}$, 此时$\overline{A}$为有理完全模. A的内射包$E(A)$和$\overline{A}$有如下关系:

$$\overline{A}=A_{nn_{E(A)}}A_{mn_{\mathrm{End}(E(A))}}A,$$

其中A_{nn}表示零化子. 另外, 环R Johnson-Utumi意义下的极大左商环就是R作为左R-模的最大有理扩张$\overline{R}$. O. Goldman在[3]中引进了核算子和幂等核算子(分别等价于滤子(filter)和幂等滤子), 把商模(分式模)的概念从交换环推广到一般环. 文[1]指出了模M的最大有理扩张$\overline{M}$正是M的一个商模$Q_{\delta_M}(M)$, 其中δ_M为M的对应的幂等滤子, 且M为有理完全模等价于M为δ_M-内射(本文符号均取于文[1]).

2 最大有理扩张的直和

关于有理完全模的直和与直积, 有下面二个结果:

引理2.1[4] 一族有理完全模的直积仍然是有理完全的.

引理2.2[1] 环R上任何一族有理完全模直和仍有理完全的充要条件是环R上每一个幂等滤子都是Noether的.

* 收稿日期: 1995-10-13

内射模也有类似的结论, 但值得注意的是引理2 1的逆命题并不成立, 即一族模的直积是有理完全的并不蕴含着这一族模都是有理完全的, 这一点与内射模不同 下面会给出该命题成立的充要条件

命题2 3 $\{M_i\}$ 是环 R 上左模的有限集合(即 M_i 数目为有限个), 则

$$\overline{\sum \oplus M_i} \subseteq \sum \oplus \overline{M_i},$$

R 为左Noether 环时, 可略去有限条件

证明 记 $A = \sum \oplus M_i, B = \sum \oplus \overline{M_i}$, 则 $E(A) = \sum \oplus E(M_i)$. 由 $\overline{M_i} \subseteq E(M_i)$ 得 $A \subseteq B \subseteq E(A)$, 所以 $E(A) = E(B)$. 由 $\delta_M = \{I \mid \mathrm{Hom}(R/I, E(M)) = 0\}$ 得 $\delta_A = \delta_B$; 由引理2 1 知 B 是有理完全的, 故

$$B = \overline{B} = \{x \in E(B) \mid Bx^{-1} \in \delta_B\}, \overline{A} = \{x \in E(A) \mid Ax^{-1} \in \delta_B\},$$

其中 $Bx^{-1} = \{r \in R \mid rx \in B\}$, 因为对任意 $x \in E(A) = E(B)$, 有 $Ax^{-1} \subseteq Bx^{-1}$ 成立, 故由滤子性质得 $\overline{A} \subseteq B$.

当 R 为左Noether 环, 略去有限条件时, 由引理2 2, $B = \overline{B}$ 仍然成立, 另外, 由Noether 特性知 $E(A) = E(B)$, 所以可用与上述同样的方法证明此时, 命题仍然成立

引理2 4 $\{M_i\}_{i=1,2,\cdots,n}$ 是一族左 R-模, 那么下列陈述等价:

(1) $\overline{\sum_{i=1}^{n} \oplus M_i} = \sum_{i=1}^{n} \oplus \overline{M_i}$

(2) $\overline{M_j} \subseteq \overline{\sum_{i=1}^{n} \oplus M_i}, \quad j = 1, 2, \cdots, n$

(3) $\overline{M_j}/M_j$ 是 δ_A-挠的, $j = 1, 2, \cdots, n$, 其中 $A = \sum_{i=1}^{n} \oplus M_i$

证明 (1) ⇒ (2) 显然 (2) ⇒ (1) 由上面的命题有 $\overline{\sum_{i=1}^{n} \oplus M_i} \subseteq \sum_{i=1}^{n} \oplus \overline{M_i}$ 由 (2) 可得:

$$\sum_{i=1}^{n} \overline{M_i} \subseteq \overline{\sum_{i=1}^{n} \oplus M_i},$$

又 $\{M_j\}_{j=1,2,\cdots,n}$ 作为 $\sum \oplus \overline{M_i}$ 的子模两两交集都只有零元素, 所以 $\sum_{i=1}^{n} \overline{M_i} \cong \sum_{i=1}^{n} \oplus \overline{M_i}$ 故证

(3) ⇒ (1) 设 $a = (a_1, a_2, \cdots, a_j, \cdots, a_n) \in \sum_{i=1}^{n} \oplus (\overline{M_i}/M_i)$, 其中 $a_j \in \overline{M_j}/M_j$, 由 (3) 得存在 $I_j \in \delta_A$, $I_j a_j = 0$, 令 $I = \bigcap_{j=1}^{n} I_j$, 则由滤子有限相交性得 $I \in \delta_A$, 又因 $Ia = 0$, 故 $\sum_{i=1}^{n} \oplus (\overline{M_i}/M_i)$ 是 δ_A-挠的, 则

$$\sum_{i=1}^{n} \oplus \overline{M_i} / \sum_{i=1}^{n} \oplus M_i$$

也是 δ_A-挠的, 即 $\sum_{i=1}^{n} \oplus \overline{M_i}$ 是 $\sum_{i=1}^{n} \oplus M_i$ 的有理扩张, 又因 $\sum_{i=1}^{n} \oplus \overline{M_i}$ 本身是有理完全的, 所以

$$\overline{\sum_{i=1}^{n} \oplus M_i} \cong \sum_{i=1}^{n} \oplus \overline{M_i}$$

(1) ⇒ (3)　由(1) 可知: $\sum_{i=1}^{n} \oplus \overline{M}_i$ 是 $\sum_{i=1}^{n} \oplus M_i$ 的有理扩张, 故 $\sum_{i=1}^{n} \oplus (\overline{M}_i / M_i)$ 是 δ_A-挠的, 所以 $\overline{M}_j / M_j$ 是 δ_A-挠的, $j = 1, 2, \cdots, n$.

引理 2.5[1]　令 $\{S_\alpha\}$ 是一族两两不同构的单 R-模的集合, 并且代表了所有的非投射的单 R-模, 则任何包含模 $T = \sum_\alpha S_\alpha$ 的模都是有理完全的.

下面是本节中主要的定理.

定理 2.7　设 R 为有单位元的环, 则下列各条等价:

(1)　对 R-模的任意集合 $\{M_i\}$, 都有 $\overline{\sum \oplus M_i} = \sum \oplus \overline{M}_i$ 成立.

(1′)　对 R-模的任意集合 $\{M_i\}$, 都有 $\sum \oplus M_i = \sum \oplus \overline{M}_i$ 成立.

(2)　$A \subseteq B$ 总蕴含着 $\overline{A} \subseteq \overline{B}$, 其中 A, B 为任意两 R-模.

(3)　如一族左 R-模的直积是有理完全的, 则这些模是有理完全的.

(4)　任意左 R-模都是有理完全的.

证明　(1′) ⇒ (1) 显然. (4) ⇒ (1′) 由对任意左 R-模 A, $A = \overline{A}$ 即知.

(2)　由引理 2.4 易得 (4) ⇒ (3) 显然, (4) ⇒ (2) 显然.

(3) ⇒ (4)　设 A 为任意 R-模, 由引理 2.6 得 $A \oplus T$ 是有理完全的, 由 (3) 可知: A 是有理完全的.

(1) ⇒ (4)　设 A 是任意一个左 R-模, 由 [3, Theorem 5.3] 知存在着左 R-模 $B \neq 0$, 使得 $\delta_B = \{R\}$, 此时 $\delta_{A \oplus B} = \delta_A \cap \delta_B = \{R\}$, 由 (1) 知, $\overline{A \oplus B} = \overline{A} \oplus \overline{B}$, 故 $(\overline{A} \oplus \overline{B}) / A \oplus B$ 是 $\delta_{A \oplus B}$-挠的, 故 $\overline{A} / A$ 也是 $\delta_{A \oplus B}$-挠的, 即 $\delta_{A \oplus B}(\overline{A} / A) = \overline{A} / A$, 故对 $\forall \bar{a} \in \overline{A} / A$, $R \bar{a} = 0$, 即 $\bar{a} = 0$, 故 $\overline{A} = 0$.

3　无零因子环上的有理完全模

定理 3.1　设 R 为无零因子环, M 为无挠左 R-模, 则 $\overline{M} = E(M)$.

证明　证 $\delta_\infty = \{$所有 R 有左理想$\}$, 则 δ_∞ 是 R 上的幂等滤子且 $\delta_\infty(M) = 0$, 故由 [3, Proposition 3.7] 易知存在模 N 满足 (1) $M \subseteq M$, (2) N / M 是 δ_∞-挠, (3) N 是忠实 δ_∞-内射, 由 (2) 和 [3, Theorem 3.8] 知 N 是 M 的本质扩张, 故 $\delta_N = \delta_M$, 由 (3) 知 $\delta_\infty(N) = 0$ 且 N 内射, 故 $\delta_N = \{I \mid Ix \neq 0, \forall x \in E(N) = N\} = \delta_\infty$, 故 $\delta_M = \delta_\infty$, 所以

$$\overline{M} = \{x \in E(M) \mid Mx^{-1} \in \delta_\infty\} = E(M).$$

推论 3.2　如 R 为无零因子环, 那么 R 的每一个左理想都是本质理想.

证明　易知 R 作为一个左 R-模是无挠的, 由上面的证明知: $\delta_R = \delta_\infty$, 故对 R 的任意一个左理想 I, $I \in \delta_\infty = \delta_R$, 由 [1, Proporition 1.1] 知: 对所有的 $r_1 \neq 0$, $r_2 \neq 0$, $r_1, r_2 \in R$, 存在 $s \in R$, 使得 $sr_1 \neq 0$, $sr_2 \in I$, 由 $sr_1 \neq 0$ 知 $s \neq 0$, 故 $sr_2 \neq 0$, 所以 R 是 I 的本质扩张.

推论 3.3　设 R 为整环 (交换无零的环), M 是无挠单 R-模, 则 M 是内射模.

证明　在 [1] 中已有结果: 交换环的单模一定是有理完全的, 故 $M = \overline{M}$, 又由定理 3.1 知: $\overline{M} = E(M)$, 故 $M = \overline{M} = E(M)$, 即 M 为内射模.

引理 3.4[2, Theorem 3.4]　如 R-模 M 的奇异子模 (singular submodule) 为零, N 为 M 的一个子

模，则M是N的本质扩张的充要条件是M为N的有理扩张

有了上面的引理及推论3.2，很容易证明下面的定理：

定理3.5 设R是一个无零因子环，如R上任何循环模都有理完全，则R是除环.

证明 令I为R任一主理想，由推论3.2可知：I是R的本质理想，又因为R的奇异子模为零，所以R是I的有理扩张，故$\overline{I} = \overline{R}$. 又由题设得$I = \overline{I}, R = \overline{R}$，故$I = \overline{I} = \overline{R} = R$.

任取$a \neq 0 \in R$，则Ra是R的主理想，故$Ra = R$，所以存在$b \in R$，满足$ba = 1$，又因$0 = a - a = a - aba = (1 - ab)a$得$ab = 1$，即$b$为$a$的逆元，于是$R$为除环.

致谢 衷心感谢导师佟文廷教授的热情指导.

参 考 文 献

[1] Storrer H. *Rational extensions of modules* [J]. Pac. J. Math., 1971, **38**(3): 785-794.

[2] Courter R. *Finite completely primary rings* [J]. Canad. J. Math., 1969, **21**: 430-446.

[3] Goldman O. *Rings and modules of quotients* [J]. J. Algebra, 1969, **13**: 10-47.

On Maximal Rational Extensions of Modules

Lu Dancheng

(Changzhou Branch, Hehai University, Jiangsu Changzhou 213022)

Abstract

In this paper, we study rational extension of modules and applications to rings and some useful results are obtained.

Keywords maximal rational extension, idempotent filter.