第19卷 增刊 1999年4月
数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION
Vol. 19 Supp Apr. 1999

B值随机元阵列的完全收敛性*

牛 司 丽
(同济大学应用数学系, 上海200092)

摘 要: 令$\{X_{nj};1\le j\le n,n\ge1\}$为行独立对称的$B$值随机元阵列,$S_{ni}=\sum_{j=1}^{i}X_{nj},1\le i\le n,n\ge1,\varphi(x)\in S,r\ge1,0<t<2$. 若对足够小的$\delta>0$,当$x$和$n$充分大后$\sum_{j=1}^{n}P(\|X_{nj}\|^{rt}/\varphi(\|X_{nj}\|)>x)\le cnx^{-(1+\delta)}$,并且$S_{nn}/(n\varphi(n))^{1/t}\xrightarrow{P}0$,则$\forall\epsilon>0$,有

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^{r-2}P(\|S_{nn}\|\ge\epsilon(n\varphi(n))^{1/t})<+\infty.$$

关键词: B值随机元, 完全收敛性, p型空间
分类号: AMS(1991) 62B12/CLC O211.4
文献标识码: A **文章编号**: 1000-341X(1999)增刊-0305-07

1 引 言

自从[1]于1947年提出了实值随机变量完全收敛性的概念以来,许多学者都在致力于i.i.d.的实值(或B值)随机变量完全收敛性的研究,获得了一系列完美的成果.

近年来,一些学者将i.i.d.随机元阵列(或序列)推广到"随机有界于某一非负随机变量"(简称"随机有界"),并且在一定的矩条件下,得到了完全收敛性的若干结果[2,3]. 本文在可分的Banach空间中,研究了随机元阵列,在不满足"随机有界",并且相应的矩条件也不一定成立的情形下,讨论了范围较[2,3]广的相应结论.

设$(B,\|\cdot\|)$是实可分Banach空间,$\{X_{nj};1\le j\le n,n\ge1\}$是定义在同一概率空间上的$B$值随机元阵列. $S_{ni}=\sum_{j=1}^{i}X_{nj},1\le i\le n,n\ge1$,集合$A$的示性函数用$I(A)$表示.

称$\{X_{nj};1\le j\le n,n\ge1\}$随机有界于非负随机变量$X$,若存在常数$c>0$,使得对任意的$x>0$及所有的$n$和$j$,有$P(\|X_{nj}\|>x)\le cP(X>x)$,记为$\{X_{nj}\}<X$.

称$[0,+\infty)$上正的不减函数$\varphi(\cdot)\in S$,是指存在常数$k=k(\varphi)>0$,使

$$\varphi(xy)\le k(\varphi(x)+\varphi(y)),\ \forall x\ge0,\ \forall y\ge0,$$

并且x充分大时$x/\varphi(x)$还是不减函数.

本文中的常数一律用$c>0$表示,它在不同之处可代表不同的值.

* 收稿日期: 1996-01-26
作者简介: 牛司丽(1964-),女,河南人,本科毕业,讲师.

引理1.1[4] 设$\varphi(x)\in S$, $\delta>0$, 则$\forall x\geq 0$, 有

$$c\varphi(x)\leq\varphi(x\varphi(x))\leq c\varphi(x),\tag{1.1}$$

$$c\varphi(x)\leq\varphi(x/\varphi(x))\leq c\varphi(x),\tag{1.2}$$

$$c\varphi(x)\leq\varphi(x^{\delta})\leq c\varphi(x).\tag{1.3}$$

引理1.2[5] 设$\{X_i, i\geq 1\}$是独立对称的B值随机元序列, $0<a_i\uparrow\infty$, 若

(a) $\|X_i\|\leq a_i$, a.s $\forall i\geq 1$,

(b) $S_n/a_n\xrightarrow{P}0$,

则对一切$r>0$, 有$E\|S_n/a_n\|^r\to 0$, 其中$S_n=\sum_{i=1}^{n}X_i$.

引理1.3[5] 对每个$p\geq 1$, 存在$c_p>0$, 使得对任意Banach空间B和$L^p(B)$中独立随机元有限序列$\{X_j: 1\leq j\leq n\}$, 下列不等式成立

(i) 对于$1\leq p\leq 2$, $E\left|\|S_n\|-E\|S_n\|\right|^p\leq c_p\sum_{j=1}^{n}E\|X_j\|^p$,

(ii) 对于$p>2$, $E\left|\|S_n\|-E\|S_n\|\right|^p\leq c_p\left[\left(\sum_{j=1}^{n}E\|X_j\|^2\right)^{p/2}+\sum_{j=1}^{n}E\|X_j\|^p\right]$.

2 主要结果

定理2.1 设$\{X_{nj}; 1\leq j\leq n, n\geq 1\}$为行独立对称的$B$值随机元阵列, $r\geq 1$, $0<t<2$, $\varphi(x)\in S$. 对足够小的$\delta>0$, 当x和n充分大后

(Ⅰ) 若

$$\sum_{j=1}^{n}P\left(\|X_{nj}\|^{rt}/\varphi(\|X_{nj}\|)>x\right)\leq cnx^{-(1+\delta)},\tag{2.1}$$

并且$S_{nn}/(n\varphi(n))^{1/t}\xrightarrow{P}0$, 则$\forall\epsilon>0$, 有$\sum_{n=1}^{\infty}n^{r-2}P\left(\|S_{nn}\|\geq\epsilon(n\varphi(n))^{1/t}\right)<+\infty$.

(Ⅱ) 若

$$\sum_{j=1}^{n}P\left(\|X_{nj}\|^{rt}\varphi(\|X_{nj}\|)>x\right)\leq cnx^{-(1+\delta)},\tag{2.2}$$

并且$S_{nn}/(n/\varphi(n))^{1/t}\xrightarrow{P}0$, 则$\forall\epsilon>0$, 有$\sum_{n=1}^{\infty}n^{r-2}P\left(\|S_{nn}\|\geq\epsilon(n/\varphi(n))^{1/t}\right)<+\infty$.

证明 (Ⅰ) 令$Y_{nj}=X_{nj}I\left(\|X_{nj}\|>(n\varphi(n))^{1/t}\right)$, $S'_{ni}=\sum_{j=1}^{i}Y_{nj}$, $S''_{ni}=S_{ni}-S'_{ni}$, 则

$$\begin{aligned}&\sum_{n=1}^{\infty}n^{r-2}P\left(\|S_{nn}\|\geq\epsilon(n\varphi(n))^{1/t}\right)\\&\leq\sum_{n=1}^{\infty}n^{r-2}P\left(\|S'_{nn}\|\geq\frac{\epsilon}{2}(n\varphi(n))^{1/t}\right)+\sum_{n=1}^{\infty}n^{r-2}I\left(E\|S''_{nn}\|\geq\frac{\epsilon}{4}(n\varphi(n))^{1/t}\right)+\\&\quad\sum_{n=1}^{\infty}n^{r-2}P\left(\left|\|S''_{nn}\|-E\|S''_{nn}\|\right|\geq\frac{\epsilon}{4}(n\varphi(n))^{1/4}\right)\\&\triangleq I_1+I_2+I_3.\end{aligned}$$

利用 $x/\varphi(x)$ 的单调性, 引理 1.1 及(2.1) 式, n 充分大后

$$P\left(\|S'_{nn}\| \geq \frac{\epsilon}{2}(n\varphi(n))^{1/t}\right) \leq \sum_{j=1}^{n} P\left(\|X_{nj}\| > (n\varphi(n))^{1/t}\right)$$
$$\leq \sum_{j=1}^{n} P\left(\|X_{nj}\|^{rt}/\varphi(\|X_{nj}\|) \geq cn^{r}(\varphi(n))^{r-1}\right)$$
$$\leq cn^{1-r(1+\delta)}(\varphi(n))^{-(r-1)(1+\delta)}, \tag{2.3}$$

从而

$$I_1 \leq c\sum_{n=1}^{\infty} n^{-(1+r\delta)}(\varphi(n))^{-(r-1)(1+\delta)} + c < +\infty.$$

由(2.3) 式知 $S'_{nn}/(n\varphi(n))^{1/t} \xrightarrow{P} 0$, 由已知进而得 $S''_{nn}/(n\varphi(n))^{1/t} \xrightarrow{P} 0$, 于是由引理 1.2 得

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{E\|S''_{nn}\|}{(n\varphi(n))^{1/t}} = 0,$$

所以得 $I_2 < +\infty$.

当 $r > 1$ 时, 由引理 1.3, 设 $p > 2$ 待定

$$I_3 \leq c\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2} n(\varphi(n))^{-\frac{p}{t}} E\left|\|S''_{nn}\| - E\|S''_{nn}\|\right|^{p}$$
$$\leq c\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2}(n\varphi(n))^{-\frac{p}{t}}\left(\sum_{j=1}^{n} E\|X_{nj}\|^{2} I(\|X_{nj}\| \leq (n\varphi(n))^{1/t})\right)^{p/2} +$$
$$c\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2}(n\varphi(n))^{-\frac{p}{t}}\sum_{j=1}^{n} E\|X_{nj}\|^{p} I(\|X_{nj}\| \leq (n\varphi(n))^{1/t})$$
$$\triangleq I_4 + I_5.$$

由 $\varphi(x)$ 的定义及(1.3) 式可推得: 对 $\alpha, \beta > 0$, 当 x 充分大后, 有

$$\varphi(x^{\alpha}) \leq cx^{\beta}, \tag{2.4}$$

由于 $0 < t < 2, r > 1$, 所以可选取 $p (> 2)$, 使

$$r-2+p\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{t}\right) < -1,\quad r-2+p\left[\frac{1}{2}-\frac{r}{2}(1+\delta)\right] < -1,$$

从而由 $\varphi(x), x/\varphi(x)$ 的单调性, 利用引理 1.1 及(2.1) 式, 并注意(2.4) 式, 有

$$I_4 = c\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2}(n\varphi(n))^{-\frac{p}{t}}\left[\sum_{j=1}^{n} E\|X_{nj}\|^{2} I(\|X_{nj}\| \leq (n\varphi(n))^{1/t})\right]^{p/2}$$
$$\leq c\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2}(n\varphi(n))^{-\frac{p}{t}}\left[\sum_{j=1}^{n}\int^{n\varphi(n)} x^{\frac{2}{t}-1} P(\|X_{nj}\|^{t} > x)\,dx\right]^{p/2}$$
$$\leq c\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2}(n\varphi(n))^{-\frac{p}{t}}\left[cn + \int^{n\varphi(n)} x^{\frac{2}{t}-1}\sum_{j=1}^{n}\left(P\|X_{nj}\|^{2t}/\varphi(\|X_{nj}\|) > \frac{cx^{r}}{\varphi(x)}\right)dx\right]^{p/2}$$
$$\leq c\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2}(n\varphi(n))^{-\frac{p}{t}}\left[cn + cn\int^{n\varphi(n)} x^{\frac{2}{t}-1}(\varphi(x)/x^{r})^{1+\delta}dx\right]^{p/2}$$
$$\leq c\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2+p(\frac{1}{2}-\frac{1}{t})}(\varphi(n))^{-\frac{p}{t}} + c\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2+p(\frac{1}{2}-\frac{1}{t})}(\varphi(n))^{\frac{p}{2}(1+\delta)-\frac{p}{t}} +$$
$$c\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2+p[\frac{1}{2}-\frac{r}{2}(1+\delta)]}(\varphi(n))^{-\frac{rp}{2}(1+\delta)+\frac{p}{2}(1+\delta)}$$
$$< +\infty. \tag{2.5}$$

选取 $p(>2)$, 使 $r-1-\frac{p}{t}<-1$, 由 $\varphi(x)$, $x/\varphi(x)$ 的单调性及引理 1.1, (2.1) 式, 有

$$\begin{aligned}I_5 &\le c\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2}(n\varphi(n))^{-\frac{p}{t}}\sum_{j=1}^{n}\int^{n\varphi(n)} x^{\frac{p}{t}-1}P(\|X_{nj}\|^t>x)\,dx\\ &\le c\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-1-\frac{p}{t}}(\varphi(n))^{-\frac{p}{t}}+c\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2}(n\varphi(n))^{-\frac{p}{t}}\int^{n\varphi(n)}\sum_{j=1}^{n}P\left(\frac{\|X_{nj}\|^{rt}}{\varphi(\|X_{nj}\|)}\ge\frac{cx^r}{\varphi(x)}\right)dx\\ &\le c\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-1-\frac{p}{t}}(\varphi(n))^{-\frac{p}{t}}+c\sum_{n=1}^{\infty} n^{-(1+r\delta)}(\varphi(n))^{-(r-1)(1+\delta)}+\\ &\quad c\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-1-\frac{p}{t}}(\varphi(n))^{-\frac{p}{t}+(1+\delta)}<+\infty.\end{aligned}\tag{2.6}$$

当 $r=1$ 时, 由引理 1.3, 类似(2.6) 式的证明, 有

$$\begin{aligned}I_3 &\le c\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}(n\varphi(n))^{-\frac{2}{t}}E\left|\|S''_{nn}\|-E\|S''_{nn}\|\right|^2\\ &\le c\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}(n\varphi(n))^{-\frac{2}{t}}\sum_{j=1}^{n}\int^{n\varphi(n)} x^{\frac{2}{t}-1}P(\|X_{nj}\|^t>x)\,dx\\ &\le c\sum_{n=1}^{\infty}(n\varphi(n))^{-\frac{2}{t}}+c\sum_{n=1}^{\infty} n^{-(1+\delta)}-c\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{2}{t}}(\varphi(n))^{-\frac{2}{t}+(1+\delta)}\\ &<+\infty.\end{aligned}\tag{2.7}$$

(Ⅱ) 令 $Y_{nj}=X_{nj}I(\|X_{nj}\|>(n/\varphi(n))^{1/t})$, $S'_{ni}=\sum_{j=1}^{i}Y_{nj}$, $S''_{ni}=S_{ni}-S'_{ni}$, 则

$$\begin{aligned}&\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2}P(\|S_{nn}\|\ge\epsilon(n/\varphi(n))^{1/t})\\ &\le\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2}P\left(\|S'_{nn}\|\ge\frac{\epsilon}{2}(n/\varphi(n))^{1/t}\right)+\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2}I\left(E\|S''_{nn}\|\ge\frac{\epsilon}{4}(n/\varphi(n))^{1/t}\right)+\\ &\quad\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2}P\left(\left|\|S''_{nn}\|-E\|S''_{nn}\|\right|\ge\frac{\epsilon}{4}(n/\varphi(n))^{1/t}\right)\\ &\triangleq I_6+I_7+I_8.\end{aligned}$$

利用 $\varphi(x)$ 的单调性, 引理1.1及(2.2) 式

$$\begin{aligned}P\left(\|S'_{nn}\|\ge\frac{\epsilon}{2}(n/\varphi(n))^{1/t}\right)&\le\sum_{j=1}^{n}P(\|X_{nj}\|>(n/\varphi(n))^{1/t})\\ &\le\sum_{j=1}^{n}P(\|X_{nj}\|^{rt}\varphi(\|X_{nj}\|)\ge cn^r/(\varphi(n))^{r-1})\le cn^{1-r(1+\delta)}(\varphi(n))^{(r-1)(1+\delta)},\end{aligned}\tag{2.8}$$

从而 $I_6\le c\sum_{n=1}^{\infty} n^{-(1+r\delta)}(\varphi(n))^{(r-1)(1+\delta)}<+\infty$.

由(2.8) 式及(2.4) 式知 $S'_{nn}/(n/\varphi(n))^{1/t}\xrightarrow{P}0$, 进而知 $S''_{nn}/(n/\varphi(n))^{1/t}\xrightarrow{P}0$, 于是由引理1.2得

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{E\|S''_{nn}\|}{(n/\varphi(n))^{1/t}}=0,$$

从而得 $I_7<+\infty$.

当 $r>1$时, 由引理1.3, 设 $p>2$待定

$$I_8 \le c\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2}(n/\varphi(n))^{-\frac{p}{t}}\Big[\sum_{j=1}^{n} E\|X_{nj}\|^2 I(\|X_{nj}\| \le (n/\varphi(n))^{1/t})\Big]^{p/2} +$$
$$c\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2}(n/\varphi(n))^{-\frac{p}{t}}\sum_{j=1}^{n} E\|X_{nj}\|^p I(\|X_{nj}\| \le (n/\varphi(n))^{1/t})$$
$$\triangleq I_9 + I_{10}.$$

由$\varphi(x)$的单调性，类似于(2.5)式的证明，并选取$p\,(>2)$，满足

$$r-2+p\Big(\frac{1}{2}-\frac{1}{t}\Big) < -1,\ r-2+p\Big[\frac{1}{2}-\frac{r}{2}(1+\delta)\Big] < -1,$$

利用(2.4)式，有

$$I_9 \le c\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2+p(\frac{1}{2}-\frac{1}{t})}(\varphi(n))^{\frac{p}{t}} + c\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2+p[\frac{1}{2}-\frac{r}{2}(1+\delta)]}(\varphi(n))^{\frac{rp}{2}(1+\delta)}$$
$$< +\infty.$$

选取$p\,(>2)$，使$r-1-\frac{p}{t} < -1$，由$\varphi(x)$的单调性，类似(2.6)式的证明，并利用(2.4)式得

$$I_{10} \le c\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-1-\frac{p}{t}}(\varphi(n))^{\frac{p}{t}} + c\sum_{n=1}^{\infty} n^{-(1+r\delta)}(\varphi(n))^{r(1+\delta)} < +\infty.$$

当$r=1$时，由引理1.3，类似(2.7)式的证明，有

$$I_8 \le c\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}(n/\varphi(n))^{-\frac{2}{t}} E\,\big|\|S''_{nn}\| - E\|S''_{nn}\|\big|^2$$
$$\le c\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}(n/\varphi(n))^{-\frac{2}{t}}\sum_{j=1}^{n}\int_0^{n/\varphi(n)} x^{\frac{2}{t}-1}P(\|X_{nj}\|^t > x)\,dx$$
$$\le c\sum_{n=1}^{\infty}(n/\varphi(n))^{-\frac{2}{t}} + c\sum_{n=1}^{\infty}(n/\varphi(n))^{-(1+\delta)} < +\infty.$$

通过对定理2.1中的$\varphi(x)$作不同的选择，可得到多种不同的结果.特别地，取$\varphi(x)=1$，由对称化方法可得

推论2.1 设$\{X_{nj}: 1\le j\le n, n\ge 1\}$为行独立的$B$值随机元阵列，$r\ge 1$，$0<t<2$，若对足够小的$\delta>0$，当$x$和$n$充分大后

$$\sum_{j=1}^{n} P(\|X_{nj}\| > x) \le cnx^{-(rt+\delta)}, \tag{2.9}$$

并且$S_{nn}/n^{1/t} \xrightarrow{P} 0$，则$\forall \epsilon > 0$，有$\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2}P(\|S_{nn}\| \ge \epsilon n^{1/t}) < +\infty$.

注1 在推论2.1中取当$r>1$时$1\le t<2$或当$r=1$时$1<t<2$，并设$\{X_{nj}\} < X$，若将条件(2.9)换为$EX^{rt} < +\infty$，即为[2]的定理1.

仿[6]中定理2.2，2.3，推论2.1的证明可得

定理2.2 设B是可分Banach空间，$1\le t<p\le 2$.则以下条件等价:

(a) B是p型的.

(b) 对每一行独立零均值的B值随机元阵列$\{X_{nj}: 1\le j\le n, n\ge 1\}$及任一实数阵列$\{a_{nj}: 1\le j\le n, n\ge 1\}$，若对足够小的$\delta>0$，

(i) $\sup\limits_{n,j} P(\|X_{nj}\| > x) = o(x^{-(t+\delta)})$,

(ii) $\lim\limits_{n\to+\infty}\max\limits_{1\le j\le n}|a_{nj}| = 0$ 且 $\sum_{j=1}^{n}|a_{nj}|^t \le c$,

那么 $\sum_{j=1}^{n} a_{nj}X_{nj} \xrightarrow{P} 0$ 或 $\sum_{j=1}^{n} a_{nj}X_{nj} \xrightarrow{L^t} 0$.

由推论 2.1 及定理 2.2 可得

推论 2.2 设 $1 \le t < p \le 2$, B 为 p 型 Banach 空间, $\{X_{nj}: 1 \le j \le n, n \ge 1\}$ 为行独立零均值的 B 值随机元阵列, 若对足够小的 $\delta > 0$

$$\sup_{n,j} P(\|X_{nj}\| > x) = o(x^{-(2t+\delta)}), \tag{2.10}$$

则 $\forall \epsilon > 0$, 有

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(\|S_{nn}\| \ge \epsilon n^{1/t}) < +\infty.$$

注 2 设 $\{X_{nj}\} < X$, 若将条件(2.10) 换为 $EX^{2t} < +\infty$, 则推论 2.2 即为[3] 中的定理 4.

仿[6] 中定理 2.1 的证明得

定理 2.3 设 $\{X_n\}$ 是独立的 B 值随机元序列, $0 < t < 2$, 对足够小的 $\delta > 0$, 若 $\sup_n P(\|X_n\| > x) = o(x^{-(t+\delta)})$, 则

$$S_n/n^{1/t} \xrightarrow{P} 0 \Leftrightarrow S_n/n^{1/t} \to 0 \quad \text{a. s.}$$

由推论 2.1, 定理 2.2, 2.3 得

推论 2.3 设 $\{X_n\}$ 是独立零均值的 B 值随机元序列, $1 \le t < 2$, 对足够小的 $\delta > 0$, 若

$$\sup_n P(\|X_n\| > x) = o(x^{-(t+\delta)}),$$

则以下条件等价:

(a) B 是 p 型的 $(t < p \le 2)$.

(b) $S_n/n^{1/t} \xrightarrow{P} 0$.

(c) $S_n/n^{1/t} \to 0$ a. s.

(d) $E\|S_n\|^t = o(n)$.

(e) $\forall \epsilon > 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} P(\|S_n\| \ge \epsilon n^{1/t}) < +\infty$.

注 3 文献[7] 证明了: 对零均值独立同分布的 B 值随机元序列 $\{X_n\}$, 在 t 型空间 $(1 \le t < 2)$ 中, (c), (d), (e) 及 $E\|X_1\|^t < +\infty$ 等价; 文献[8] 证明了: 对零均值独立同分布的 B 值随机元序列 $\{X_n\}$, 当 $1 < t < 2$ 时, (c), (d), (e) 等价.

参 考 文 献

[1] Hsu P L, Robbins H. *Complete convergence and the law of large numbers* [J]. Proc. Nat. Acad. Sci., U. S. A., 1947, **33**(2): 25- 31.

[2] Wang X C, Rao B M and Yang X Y. *Convergence rates on strong laws of large numbers for arrays of rowwise independent elements* [J]. Stochastic Anal. Appl., 1993, **11**(1): 115- 132.

[3] Taylor R L and Hu T C. *Strong laws of large numbers for arrays of rowwise independent random elements* [J]. Internat. J. Math. &Math. Sci., 1987, **10**: 805- 814.

[4] Wu Z Q, Wang X C and Li D L. *Some general results of the law of large numbers* [J]. Northeastern Math. J., 1987, **3**(2): 228- 238.

[5] de Acosta A. *Inequalities for B-valued random vectors with applications to the strong law of large numbers*. Ann. Prob., 1981, **9**(1): 157-161.

[6] **甘师信. B 值随机元阵列加权和的收敛性与大数定律** [J]. **武汉大学学报**, 1997, **43**(5): 569-574.

[7] Azlarov T A and Volodin N A. *Laws of large numbers for identically distributed Banach-space valued random variables* [J]. Theor. Prob. Appl., 1981, **26**: 573-580.

[8] Victor H and Romo J J. *On the type hypothesis for the strong law of large numbers* [J]. Statist. Prob. Lett., 1987, **5**: 193-195.

Complete Convergence for Arrays of B-Valued Random Elements

Niu Sili

(Dept of Appl. Math., Tongji University, Shanghai 200092)

Abstract

Let $\{X_{nj}; 1 \le j \le n, n \ge 1\}$ be a symmetric array of rowwise independent random elements in a separable Banach space B, $S_{ni} = \sum_{j=1}^{i} X_{nj}, 1 \le i \le n, n \ge 1, \varphi(x) \in S, r \ge 1, 0 < t < 2$. For enough large x and n enough small positive number δ, if $\sum_{j=1}^{n} P(\|X_{nj}\|^{rt}/\varphi(\|X_{nj}\|) > x) \le cnx^{-(1+\delta)}$ and $S_{nn}/(n\varphi(n))^{1/t} \to 0$ in probability, then for every $\epsilon > 0$, 有

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2} P(\|S_{nn}\| \ge \epsilon(n\varphi(n))^{1/t}) < +\infty.$$

Keywords Random elements in Banach space, complete convergence, p-type Banach space.