第19卷 增刊　　数学研究与评论　　Vol. 19 Supp
1999年4月　　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　　Apr. 1999

完备非紧具非负曲率流形之拓扑结构*

詹 华 税
(集美大学水产学院基础部, 361021)

摘　要: 本文给出完备非紧具非负曲率的 Riemann 流形具有限拓扑型的一个简单证明

关键词: 非负曲率, 有限拓扑型
分类号: AMS(1991) 53C20/CLC O186.16
文献标识码: A　　**文章编号**: 1000-341X(1999)增刊-0315-02

自七十年代以来, 完备非紧具非负曲率的 Riemann 流形之结构一直是微分几何的一个较为热门课题, 两个经典的结果就是 Gromoll-Meyer 定理[1], Cheeger-Gromoll 核心定理[2]. 最近 G. Perelman[3]成功地把 Gromoll-Meyer 定理推广到具拟正曲率之情形. 此定理首先是由 Cheeger-Gromoll 在[2]中已被猜测到的.

设 M 为一完备 Riemann 流形, 若存在一紧区域 Ω, 其边界 $\partial\Omega$ 是一拓扑流形, 若 $M\setminus\Omega$ 同胚于 $\partial\Omega\times[0,+\infty)$, 则称 M 是拓扑有限的. 柱面是一最简单的例子. 在这篇短文中将证明

定理　设 M 为完备非紧具非负曲率的 Riemann 流形, 则 M 是拓扑有限的.

首先引入 P. Li 和 L. F. Tam 在[8]中的一个结果.

引理1　设 M 为完备非紧具非负曲率的 Riemann 流形, 则 $\forall p\in M$,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{b_p(x)}{\rho_p(x)}=1. \tag{1}$$

其中 $\rho_p(x)$ 是关于 P 点之距离函数, 而 $b_p(x)=\lim\limits_{t\to\infty}(t-d(x,s(p,t)))$, $s(p,t)$ 代表以 t 为半径, p 为中心之测地球面.

现在若令 $e_p(x)=\rho_p(x)-b_p(x)$. 则有

引理2　设 M 为完备非紧具非负曲率之 Riemann 流形, $p\in M$, 若 $q\in M$ 为 ρ_p 之临界点(或称为 p 之临界点), 则

$$e_p(q)\geq\rho_p(q). \tag{2}$$

注意到 ρ_p 不是光滑函数, 所以此时临界点之定义是由 Grove-Shiohama 在[9]中引进的一等价性定义. 具体讲, 设 $q\in M$, 若 $\forall v\in T_qM$ 都有一最短测地线 σ 连接 q 与 p 使得

$$\angle(\mathring{\sigma}(0),v)\leq\frac{\pi}{2},$$

* **收稿日期**: 1995-12-19
基金项目: 福建省教委科研基金项目
作者简介: 詹华税(1966-), 男, 福建大田人, 硕士, 集美大学水产学院副教授

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

则 q 为 p 之临界点.

引理2是下面引理3之直接结果.

引理3([10]之引理10) 设 M 为一完备非紧具非负曲率之Riemann流形, 截曲率 $k_M \geq -k$, 其中 $k>0$ 是一常数. 对 $p \in M$, 若 $q \neq p$ 是 p 之临界点, 则

$$e_p(q) \geq \frac{1}{\sqrt{k}} \ln \frac{\exp \sqrt{k}\, \rho_p(q)}{\cosh \rho_p(q) \sqrt{k}}. \tag{3}$$

在(4)中让 $k \to 0$ 即得(3)式.

定理的证明 由合痕引理(isotopy lemma, 见[11])), 只要能够证明 ρ_p 在一紧集之外不含临界点即可. 设不然, 即存在点列 $x_n \in M$, $x_n \to \infty$ 当 $n \to \infty$. x_n 是 p 之临界点. 于是由引理2知

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e_p(x_n)}{\rho_p(x_n)} \geq 1 \tag{4}$$

而由引理1又有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e_p(x)}{\rho_p(x)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\rho_p(x) - b_p(x)}{\rho_p(x)} = 0. \tag{5}$$

(4)与(5)显矛盾. 定理得证.

参 考 文 献

[1] Gromoll D and Meyer W T. *Complete open manifolds of positive curvature* [J]. Ann. of Math., 1969, **96**(2): 75-90.

[2] Cheeger J and Gromoll D. *On the structure of complete manifolds of nonnegative curvature* [J]. Ann. of Math., 1974, **96**(2): 413-443.

[3] Perelman G. *Proof of the soul conjecture of Cheeger and Gromoll* [J]. Preprint.

[4] Li P and Tam L F. *Positive harmonic functions on complete manifold with nonnegative curvature outside a compact set* [J]. Ann. of Math., 1987, **125**(2): 171-207.

[5] Grove K and Shiohama K. *A generalized sphere theorem* [J]. Ann. of Math., 1977, **106**(2): 201-211.

[6] Shen Z. *On Riemannian manifolds of nonnegative kth-Ricci curvature* [J]. Trans. Amer. Math., 1993, **54**: 539-549.

[7] Monlor J. *Morse Theorey* [M]. Princeton Uni Press, Princeton, N. J. 1975.

The Topological Structure of a Complete Open Manifold with Nonnegative Curvature

Zhan Huashui

(Dept. of Basic Sci., Fisheries Coll. of Jimei Univ., Xiamen 361021)

Abstract

In the paper, we prove that every complete open manifold with nonnegative curvature must be of finite topological type.

Keywords nonnegative curvature, finite topological type.

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.