第20卷第1期　　数学研究与评论　　Vol. 20 No. 1
2000年2月　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　Feb. 2000

常平均曲率超曲面的曲率估计与稳定性*

孙弘安[1]，　欧阳崇珍[2]
(1. 南方冶金学院，江西赣州 341000； 2. 南昌大学，江西 330047)

摘　要：本文估计了空间形式 $N^{n+1}(c)$ 中常平均曲率超曲面上共形度量的曲率上界，并用其研究了 $N^{n+1}(c)$ 中常平均曲率超曲面的强稳定性.

关键词：常平均曲率；共形度量；曲率估计；强稳定性.
分类号：AMS(1991) 53C25/CLC O186.16
文献标识码：A　　　**文章编号**：1000-341X(2000)01-0089-05

1 引　言

如所知，极小子流形上共形度量的曲率估计与稳定性的研究，已取得不少成果. 近年来，人们开始研究常平均曲率超曲面的强稳定性(它是极小子流形稳定性的自然推广). 对 3 维空间形式中具常平均曲率的曲面，Barbosa 和 Mori[1]、Silveira[2]、Li[3,4]等人获得了一系列有趣的结果. 它们都是相应极小曲面结果的推广. 本文研究更高维空间形式中具常平均曲率超曲面上共形度量的曲率估计和区域的强稳定性，所获得的结果是沈一兵[5]关于极小超曲面相应结果的推广.

2　准备工作

设 M 是 $n+1$ 维空间形式 $N^{n+1}(c)$ 中具常平均曲率的超曲面，在 $N^{n+1}(c)$ 中选取局部正交规范标架场 $\{e_A\}$ 使得限制在 M 上时，e_{n+1} 正交于 M. 以后若无其他说明，指标的取值范围规定如下：

$$1 \leqslant A, B, C \cdots \leqslant n+1, \quad 1 \leqslant i, j, k, \cdots \leqslant n,$$

且约定 $\sum$ 号后重复指标表示求和. 设 $\{w_A\}$ 是 $\{e_A\}$ 的对偶标架场，则 M 的第二基本形式 B 和平均曲率 H 可写为

$$B = \sum h_{ij} w_i w_j e_{n+1}, \quad H = \frac{1}{n} \sum h_{ii}. \tag{2.1}$$

M 的 Gauss-Codazzi 方程为

* 收稿日期：1997-02-17
基金项目：国家自然科学基金资助项目(19871038)；江西省自然科学基金资助项目(981105)
作者简介：孙弘安(1959-)，男，江西人，南方冶金学院教授.

$$R_{ijkl}=c(\delta_{ik}\delta_{jl}-\delta_{il}\delta_{kj})+(h_{ik}h_{jl}-h_{il}h_{kj}),h_{ijk}=h_{ikj}. \tag{2.2}$$

M 的数量曲率 R 为

$$R=n(n-1)c+n^2H^2-\|B\|^2, \tag{2.3}$$

其中 $\|B\|^2=\sum h_{ij}^2$. 直接计算得[6]

$$\frac{1}{2}\triangle\|B\|^2=\|\nabla B\|^2-\|B\|^4+(nc+3nH^2)\|B\|^2-n^2cH^2-2n^2H^2-$$
$$\frac{n(n-2)H}{n(n-1)}(\|B\|^2-nH^2)^{\frac{3}{2}} \tag{2.4}$$

其中△和▽分别表示 M 上关于诱导度量 g 的共变微分和 Laplacian 算子,

$$\|\triangle B\|^2=\sum(h_{ijk})^2.$$

引理[5] 设 M 是 $N^{n+1}(c)$中常平均曲率的超曲面,则

$$(\triangle\|B\|^2)^2\leqslant\frac{4n}{n+2}\|B\|^2\|\nabla B\|^2.$$

3 曲率估计

本节估计空间形式中非极小的常平均曲率超曲面上共形度量的数量曲率的上界.

定理 1 设 M 是 $N^{n+1}(c)$中具非零平均曲率 H 的超曲面,g 是诱导度量,R 是数量曲率,α 是满足下述条件的实数,

当 $c\geqslant0$ 时,$\alpha\geqslant1+[2n-3+2(n-2)\sqrt{n-1}]^{-1}$;

当 $c<0$ 时,$\alpha\leqslant1-[4n-5+4(n-2)\sqrt{n-1}]^{-1}$,

则 M 上共形度量 $\widetilde{g}=[\alpha n(n-1)c+n^2H^2-R]g$ 的数量曲率 R 满足:

$$\widetilde{R}\leqslant 2n-3+2(n-2)\sqrt{n-1}. \tag{3.1}$$

证明 令 $\delta=\alpha n(n-1)c+n^2H^2-R$,$b=(\alpha-1)n(n-1)c$,由(2.3)和定理假设知

$$\delta=\|B\|^2+b>0 \quad (b\geqslant0). \tag{3.2}$$

如所知,$\widetilde{g}$ 的数量曲率 $\widetilde{R}$满足[7]

$$\delta\widetilde{R}=R-(n-1)\triangle log\delta-1\ 4\ (n-1)(n-6)\|\triangle\log\delta\|^2. \tag{3.3}$$

将(3.2)和(2.4)代入(3.3)得

$$-\delta^2\widetilde{R}=\delta^2-[\alpha n(n-1)c+n^2H^2]\delta+(n-1)\triangle\delta+\frac{1}{4}(n-1)(n-6)\frac{\|\triangle 6\|^2}{\delta}$$
$$=(3-2n)\delta^2+[2(n-1)(2b+nc+3nH^2)-\alpha n(n-1)c-n^2H^2]\delta-$$
$$2(n-1)(b+nc+2nH^2)(b+nH^2)-\frac{2n(n-1)(n-2)H}{\sqrt{n(n-1)}}(\|B\|^2-nH^2)^{\frac{3}{2}}+$$
$$2(n-1)\|\nabla B\|^2-\frac{1}{4}(n-1)(n-6)\frac{\|\nabla\delta\|^2}{\delta}. \tag{3.4}$$

注意到 $\delta\geqslant\|B\|^2$,由引理知

$$\|\nabla B\|^2\geqslant\frac{n+2}{4n}\frac{\|\nabla\delta\|^2}{\delta}, \tag{3.5}$$

从而

$$2(n-1)\|\nabla B\|^2+\frac{1}{4}(n-1)(n-6)\frac{\|\triangle\delta\|^2}{\delta}\geqslant\frac{n-1}{4n}(n-2)^2\frac{\|\nabla\delta\|^2}{\delta}\geqslant 0. \tag{3.6}$$

此外由 $\|B\|^2\geqslant nH^2$ 得

$$\frac{2n(n-1)(n-2)H}{\sqrt{n(n-1)}}(\|B\|^2-nH^2)^{3/2}\leqslant 2(n-2)\sqrt{n-1}\|B\|^2(\|B\|^2-nH^2).$$

将上式及(3.6)代入(3.4),得

$$-\delta^2\widetilde{R}\geqslant-[2n-3+2(n-2)\sqrt{n-1}]\delta^2+L(\delta), \tag{3.7}$$

其中

$$\begin{aligned}L(\delta)=&[2(n-1)(2b+nc+3nH^2)+2(n-2)\sqrt{n-1}(2b+nH^2)-\\&n^2H^2-an(n-1)c]\delta-2(n-2)\sqrt{n-1}b(b+nH^2)-\\&2(n-1)(b+nc+2nH^2)(b+nH^2).\end{aligned} \tag{3.8}$$

利用 $L(\delta)$ 单调性,易知 $L(\delta)\geqslant 0$,再由(3.7)知 $\widetilde{R}\leqslant 2n-3+2(n-2)\sqrt{n-1}$.

注 当 $H=0$ 时,文献[5]已得更好的结果:$\widetilde{R}\leqslant 2n-3$. 当 $n=2$ 时,对 R 的估计是一致的,综合起来得到

推论 1[3,4] 设 M 是 $N^3(C)$ 中具常平均曲率 H 的曲面,g 是诱导度量,K 是 M 关于 g 的 Gauss 曲率,a 是满足下述条件的实数:

$$当\ c\geqslant 0\ 时,a\geqslant 2;当\ c<0\ 时,a\leqslant\frac{2}{3},$$

则共形度量 $g=(ac+2H^2-K)g$ 的 Gauss 曲率 $\widetilde{K}$ 满足 $\widetilde{K}\leqslant 1$.

4 常平均曲率超曲面的强稳定性

跟随 $n=2$ 时 Silveira[2]关于强稳定性的定义,给出一般定义.

定义 设 M 是 $N^{n+1}_{(c)}$ 中具常平均曲率 H 的超曲面,g 是 M 上的诱导度量,$*lg$ 表示 M 上关于 g 的体积元,D 是 M 上具紧致闭包的区域,并具光滑边界 D. 若

$$I_D(f)=\int_D[\|\nabla f\|^2-(n^2C+n^2H^2-R)f^2]*1g>0, \tag{4.1}$$

对所有使 $f|_{\partial D}=0$ 的 D 上的非负实值函数 f 都成立,则称 D 是强稳定的.

显然,若 $H=0$,强稳定性退化为极小子流形的稳定性.

当 $n=2$ 或 $H=0$ 时,文[1]-[5]已有许多研究结果,现在考虑 $n\geqslant 3$ 且 $H\neq 0$ 时的情形.

定理 2 设 M 是 $N^{n+1}(c)$ 中具常平均曲率 $H(H\neq 0)$ 的超曲面,$n\geqslant 3$,g 是 M 上的诱导度量,R 是数量曲率,

$$\tilde{c}=\max\{n^2c,\frac{4n-6+4(n-2)\sqrt{n-1}}{4n-5+4(n-2)\sqrt{n-1}}n(n-1)c\}. \tag{4.2}$$

若共形度量 $\tilde{g}=(\tilde{c}+n^2H^2-R)g$ 的截面曲率为常数,且对 M 上单连通区域 D 有

$$\int_D(\tilde{c}+n^2H^2-R)^*1g\leqslant\frac{\omega_n}{2}\left[\frac{2n-3+2(n-2)\sqrt{n-1}}{n(n-1)}\right]^{-\frac{n}{2}}, \tag{4.3}$$

其中 $\omega_n=2\pi^{(\frac{n+1}{2})}/\Gamma(\frac{n+1}{2})$ 表示 n 维单位球面 $S^n(1)\subset R^{n+1}$ 的 n 维体积. 则 D 是强稳定的.

证明 假设 D 不是强稳定的. 根据定义, 存在函数 $f:D\to[0,+\infty)$, $f|_{\partial D}=0$, 使得

$$\int_D[\|\nabla f\|^2-(n^2c+n^2H^2-R)f^2]^*1g\leqslant 0.$$

结合(4.2)有

$$\int_D(\tilde{c}+n^2H^2-R)f^{2*}1g\geqslant\int_D\|\nabla f\|^2*1g. \tag{4.4}$$

令 $\delta=\tilde{C}+n^2H^2-R$, 由定理假设知 $\delta>0$, 且 M 上关于共形度量 $\tilde{g}=\delta g$ 的体积元 $^*1\tilde{g}$ 满足 $^*1\tilde{g}=\delta{}^*1g$, 故

$$\int_D f^2*1\tilde{g}=\int_D\delta f^2*1g\geqslant\int_D\|\nabla f\|^2*1g=\int_D\|\tilde{\nabla}f\|^2*1\tilde{g}.$$

由特征值的极大—极小原理, 得

$$\tilde{\lambda}_1(D)\leqslant 1 \tag{4.5}$$

其中 $\tilde{\lambda}_1(D)$ 表示 D 上关于 $\tilde{g}$ 的 Laplacian 的第一 Dirichlet 特征值.

因 $\tilde{g}$ 有常数截面曲率, 若记为 $\tilde{K}$, 则关于 $\tilde{g}$ 的数量曲率 $\tilde{R}=n(n-1)\tilde{K}$. 由定理 1 得

$$\tilde{K}\leqslant\frac{1}{n(n-1)}[2n-3+2(n-2)\sqrt{n-1}],$$

将 D 看作空间形式 $N^n(\tilde{K})$ 的一个区域, 其中诱导度量为 $\tilde{g}$, 则由 Faber-Krahn 不等式[8]得

$$\tilde{\lambda}_1(D)\geqslant\tilde{\lambda}_1(\Omega), \tag{4.6}$$

其中 Ω 是 $N^n(\tilde{K})$ 的一个测地盘, 使 Ω 的体积 $\tilde{V}(\Omega)$ 等于 D 在 $\tilde{g}$ 下的体积 $\tilde{V}(D)$. 再由特征值比较定理和(4.6)得

$$\tilde{\lambda}_1(\Omega)\geqslant\lambda_1(\Omega^*), \tag{4.7}$$

其中 Ω^* 是曲率为 $K_0=[2n-3+2(n-2)\sqrt{n-1}]/n(n-1)$ 的 n 维球面 $S^n(\frac{1}{K_0})$ 上的测地盘, 使 Ω^* 的体积 $V(\Omega^*)=\tilde{V}(\Omega)$. 而在条件(4.3)下, 有

$$V(\Omega^*)=\tilde{V}(D)=\int_D(\tilde{C}+n^2H^2-R)^*1g\leqslant\frac{1}{2}\omega_n(\sqrt{K_0})^{-n}.$$

这表明 Ω^* 含在 $S^n(\frac{1}{\sqrt{K_0}})$ 的闭半球面内, 后者的第一 Dirichlet 特征值等于 nk_o, 结合(4.5), (4.6), (4.7)得 $1\geqslant\lambda_1(\Omega)\geqslant nK_o=\frac{1}{n-1}[2n-3+2(n-2)\sqrt{n-1}]>1$ 矛盾.

定理 3 设 M 是 $N^{n+1}(c)(c\geqslant 0)$ 中具常平均曲率 $H(H\neq 0)$ 的超曲面, 在诱导度量 g 下它的第二基本形式 B 具有常数长度 $\|B\|=\sqrt{2a}$. 若 $D\subset M$ 是测地盘, 且 D 的体积满足

$$V(D)<\frac{1}{2}\omega_n(\frac{a+c}{2a+nc})^{-\frac{n}{2}}, \tag{4.8}$$

则 D 是强稳定的.

证明 设 K, $\tilde{K}$ 分别表示度量 g, $\tilde{g}$ 的截面曲率其中 $\tilde{g}=(2a+nc)g$, 则有[7]

$$K=(2a+nc)\tilde{K}. \tag{4.9}$$

由(2.2), 对任意 $i\neq j$, 有

$$R_{ijij}=C+h_{ii}h_{jj}-h_{ij}^2\leqslant c+\frac{1}{2}(h_{ii}^2+h_{jj}^2)\leqslant c+\frac{1}{2}\|B\|^2=c+a. \tag{4.10}$$

将(4.10)代入(4.9)得 $\tilde{K}\leqslant\frac{a+c}{2a+nc}$. 另一方面,从(2.4)得 $n^2c+n^2H^2-R=2a+nc$. 故(4.8)可改写为

$$\int_D(2a+nc)^*1g<\frac{1}{2}\omega_n\left(\frac{a+c}{2a+nc}\right)^{-\frac{n}{2}}.$$

类似定理 2 的证明,可知 D 是强稳定的.

注 当 $H=0$ 时,文[5]已得与定理 2,定理 3 相应的更强的结论.

参考文献:

[1] BARBKSA J L and MORI H. *Stability of constant mean curvature surfaces in Rieinannian 3-Space form* [J]. Yokohama Math. J., 1987, **30**:73—79.

[2] SILVEIRA A M da. *Stability of complete noncompact surfaces with constantmean curvature* [J]. Math. Ann., 1987, **277**: 629—638.

[3] LI Hai-Zhong. *Stability of surfaces with constant mean curvature* [J]. Proc. Amer. Math. Soc., 1989, **105**: 992—997.

[4] 李海中. $H^3(C)$中具常平均曲率曲面的稳定性 [J]. 数学学报, 1991, **34**: 559—603.

[5] 沈一兵. 极小子流形的曲率估计与稳定性[J]. 中国科学(A), 1987, **9**: 917—926.

[6] OKUMURA M. *Hypersurfaces and a pinching problem on the second fundamental tensor* [J]. Amer. J. Math., 1974, **96**: 207—213.

[7] CHEN B Y. *Geometry of submanifolds* [M]. Marcel Deker, Inc., 1973.

[8] CHAVEL I. *Eigenvalues in Riemannian Geometry* [M]. Academic Press, 1984.

Curvature Estimation and Stability of Constant Mean Curvature Hypersurfaces

SUN Hong-an[1], **OUYANG Chong-zhen**[2]

(1. Southern Institute of Metallurgy, Jiangxi 341000; 2. Nanchang University, 330047)

Abstract: In this paper we estimate the Gaussian curvature of a conformal metric on a hypersurface with constant mean curvature in the space form $N^{n+1}(C)$. By use of the estimation, we study the stability of the domains of hypersurfaces with constant mean curvature in $N^{n+1}(C)$.

Key words: constant mean curvature; conformal metric; curvature estimation; strongly stability.