第20卷第1期 数学研究与评论 Vol. 20 No. 1
2000年2月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Feb. 2000

分担四个或五个小函数的亚纯函数*

李 玉 华
(山东大学数学与系统科学学院，济南 250100)

摘 要:本文证明了两个非常数亚纯函数在具有五个 IM 分担小函数的前提下附加一定条件,则这两个函数必恒等,并研究了两个具有四个 CM 分担小函数的非常数亚纯函数之间的关系,推广了 Nevanlinna 四值定理.

关键词:亚纯函数；IM(CM)分担小函数；唯一性.
分类号:AMS(1991) 30D30/CLC O174.52
文献标识码:A **文章编号**:1000-341X(2000)01-0094-03

本文采用 Nevanlinna 理论中的标准记号(见[1],[2]).若 $h(z)$ 为非常数亚纯函数,符号 $S^*(r,h)$ 泛指 $o\{T(r,h)\}$ $(r\to\infty,\ r\notin E)$ 型的量,E 本质上为 R^+的线测度为有穷的子集.设 $f_1(z)$ 和 $f_2(z)$ 均为非常数亚纯函数,$a(z)$ 为亚纯函数(可恒等于 ∞),如果 $a(z)\equiv\infty$ 或 $a(z)\not\equiv\infty$ 时有 $T(r,a)=S^*(r,f_j)$ $(j=1,2)$,则称 $a(z)$ 为 $f_1(z)$ 与 $f_2(z)$ 的公共小函数.记 $f_1(z)=a(z)$ 与 $f_2(z)=a(z)$ 的不计较(计较)重数的公共根所成点列的精简密指量为 $\widetilde{N}_I(r,a)$ $(\widetilde{N}_C(r,a))$,

(i) 若 $\overline{N}(r,\frac{1}{f_j-a})-\widetilde{N}_I(r,a)=S^*(r,f_j)$ $(j=1,2)$,则称 $a(z)$ 为 $f_1(z)$ 与 $f_2(z)$ 的 IM′ 分担小函数;

(ii) 若 $\overline{N}(r,\frac{1}{f_j-a})\equiv\widetilde{N}_I(r,a)$ $(j=1,2)$,则称 $a(z)$ 为 $f_1(z)$ 与 $f_2(z)$ 的 IM 分担小函数.

将 (i) 和 (ii) 中精简密指量的下标 I 换为 C,便分别得 CM′分担小函数和 CM 分担小函数的概念,特别当 $a(z)\equiv c_0$(常数)时,便得 IM′分担值等概念.

在亚纯函数唯一性理论中,关于 Nevanlinna 五值定理中的条件‘5 个 IM 分担值’能否以‘5 个 IM 分担小函数’替代的问题,迄今尚未解决.1993 年,张庆德[3]建立了下述:

引理 1 设 $f(z)$ 为非常数亚纯函数,$a_j(z)$ $(j=1,2,3,4,5)$ 为 $f(z)$ 的 5 个判别的亚纯小函数,则

$$2T(r,f)<\sum_{j=1}^{5}\overline{N}(r,\frac{1}{f-a_j})+S^*(r,f).$$

利用引理 1,张庆德在文献[3]中证明了如下两个结论:

* **收稿日期**:1996-06-24; **修订日期**:1998-09-29
作者简介:李玉华(1963-),男,白族,云南大理人,在站定向博士后,副教授.

定理 A　设非常数亚纯函数 $f_1(z)$ 与 $f_2(z)$ 以判别亚纯函数 $a_j(z)$ $(j=1,2,3,4,5)$ 为 IM 分担小函数，且 $f_1(z)=a_j(z)$ 的重根均为 $f_2(z)=a_j(z)$ 的重根 (j=1,2,3,4,5)，则

$$f_1(z)\equiv f_2(z).$$

定理 B　若非常数亚纯函数 $f_1(z)$ 与 $f_2(z)$ 具有 6 个判别的 IM 分担小函数，则

$$f_1(z)\equiv f_2(z).$$

利用上述的引理 1,通过仔细分析,本文证明了下述:

定理 1　如非常数亚纯函数 $f_1(z)$ 与 $f_2(z)$ 以判别亚纯函数 $a_j(z)$ $(j=1,2,3,4)$ 为 IM′ 分担小函数,且存在 $\sigma>\frac{2}{3}$ 及 $J\subset R^+$，使

$$\mathrm{mes}\,J=+\infty\,,\ N(r,\frac{1}{f_1-a_5})>\sigma T(r,f_1)\ (r\in J)\,,$$

则

$$f_1(z)\equiv f_2(z).$$

定理 2　设非常数亚纯函数 $f_1(z)$ 与 $f_2(z)$ 以判别亚纯函数 $a_j(z)$ $(j=1,2,3,4,5,6)$ 为公共小函数. 如 $a_j(z)$ $(j=1,2,3,4,5)$ 为 $f_1(z)$ 与 $f_2(z)$ 的 IM′ 分担小函数,且 $\widetilde{N}_t(r,a_6)\neq S^*(r,f_1)$,则必有

$$f_1(z)\equiv f_2(z)\,.$$

定理 2 为定理 B 的改进,它说明前面提到的问题的回答很可能是肯定的.

易证如下的:

引理 2　设 $f(z)$ 为非常数亚纯函数，$b_1(z),b_2(z)$ 为 $f(z)$ 的判别亚纯小函数,且 $b_j(z)\not\equiv\infty$ $(j=1,2)$，令

$$L(f,b_1,b_2)=\begin{vmatrix} f & f' & 1\\ b_1 & b_1' & 1\\ b_2 & b_2' & 1\end{vmatrix},$$

则 $L(f,a,b)\not\equiv 0$,且

$$m(r,\frac{L(f,b_1,b_2)f^k}{(f-b_1)(f-b_2)})=S^*(r,f)\ (k=0,1).$$

利用引理 2 及 Nevanlinna 理论中的基本定理,我们可证如下的:

定理 3　若非常数亚纯函数 $f_1(z)$ 与 $f_2(z)$ 以判别亚纯函数 $a_j(z)$ $(j=1,2,3,4,5)$ 为 IM′ 分担小函数,且

$$N_{1)}(r,\frac{1}{f_1-a_5})+N_{1)}(r,\frac{1}{f_2-a_5})=S^*(r,f_1)+S^*(r,f_2),\ \widetilde{N}^*_{(3}(r,a_5)\neq S^*(r,f_1),$$

则

$$f_1(z)\equiv f_2(z).$$

注　这里的 $\widetilde{N}^*_{(3}(r,a_5)$ 表示 $f_1(z)=a_5(z)$ 与 $f_2(z)=a_5(z)$ 的重级都不小于 3 的公共根所成点列的密指量,按重数小者减去 2 计算重复数.

定理 4　设 $f_1(z)$ 与 $f_2(z)$ 是判别的非常数亚纯函数,它们以判别亚纯函数 $a_j(z)$ $(j=1,2,3,4)$ 为 CM′ 分担小函数,则存在 $a_j(z)$ $(j=1,2,3,4)$ 的重排 $a_{j_k}(z)$ $(k=1,2,3,4)$,使交

比函数 $(a_{j_1}(z), a_{j_2}(z), a_{j_3}(z), a_{j_4}(z)) \equiv -1$，而且有

$$(f_1(z), a_{j_2}(z), a_{j_3}(z), a_{j_4}(z))\ (f_2(z), a_{j_2}(z), a_{j_3}(z), a_{j_4}(z)) \equiv 1.$$

由定理 4 的结论及交比性质可得如下：

推论 若非常数亚纯函数 $f_1(z)$ 与 $f_2(z)$ 以判别亚纯函数 $a_j(z)$ $(j=1,2,3,4)$ 为 CM′ 分担小函数，而且 $(a_1(z), a_2(z), a_3(z), a_4(z)) \neq -1, \frac{1}{2}$ 及 2，则 $f_1(z) \equiv f_2(z)$.

定理 4 是著名的 Nevanlinna[4]的 4CM 分担值定理的推广.

致谢 作者对导师仪洪勋教授的指导和帮助深表谢意.

参考文献：

[1] 杨 乐. 值分布论及其新研究 [M]. 科学出版社，1982.

[2] 仪洪勋，杨重骏. 亚纯函数唯一性理论 [M]. 科学出版社，1995.

[3] 张庆德. 亚纯函数关于慢增长函数的一个唯一性定理 [J]. 数学学报，1993，**36**：826—833.

[4] Nevanlinna R. *Le Théoreme de Picard — Borel et la théorie des fonctions méromorphes* [M]. Paris, 1929.

Meromorphic Functions which Sharing Four or Five Small Functions

LI Yu-hua

(Dept. of Math., Shandong Univ., Jinan 250100)

Abstract: In this paper, we prove that if two nonconstant meromorphic functions share five distinct small functions IM and satisfy property condition, then both functions agree. And we also study the relations between two noncomstant meromorphic functions which sharing four distinct small functions CM. As a consequent, we generalized 4-point theorem due to Nevanlinna.

Key words: meromorphic function; IM(CM) sharing function; uniqueness.