第20卷第1期 数学研究与评论 Vol. 20 No. 1
2000年2月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Feb. 2000

关于超空间上Whitney映射的一个问题*

陈 尔 明
(齐齐哈尔大学数学系，黑龙江 161006)

摘　要：本文研究了超空间上的Whitney映射，给出了它的一些性质和一个反例，从而解决了文献[1]中的一个问题.

关键词：超空间；Whitney映射；同胚.
分类号：AMS(1991) 54E/CLC O189
文献标识码：A　　**文章编号**：1000-341X(2000)01-0109-04

1 引 言

本文所提到的"连续统"是指紧致连通度量空间.

定义1 设 2^X 表示连续统 X 的所有闭子集构成的集簇. 对于任意的 $A,B\in 2^X$ 赋予度量

$$H(A,B)=\max\{\sup_{a\in A}\inf_{b\in B}d(a,b),\sup_{b\in B}\inf_{a\in A}d(a,b)\},$$

空间 $(2^X,H)$ 称为空间 X 的超空间，也简记为 2^X. 度量 H 称为Hausdorff度量.

超空间上有一种很有用的映射，即Whitney映射.

定义2 拓扑空间 X 的超空间 2^X 上的Whitney映射，是指连续映射 $\omega:2^X\to[0,\omega(X)]$，它满足如下条件：

(1) 如果 $A,B\in 2^X$ 且 $A\subsetneq B$，则 $\omega(A)<\omega(B)$；

(2) 如果 $x\in X$，则 $\omega(\{x\})=0$.

有时候一个Whitney映射满足更强的条件

(3) [1]如果 $A,B\in 2^X$，$A\subset B$，则 $\omega(B\cup C)-\omega(B)\leqslant\omega(A\cup C)-\omega(A)$，$(*)$，对任意的 $C\in 2^X$ 都成立. 这种满足(3)的Whitney映射称为 $(*)$ 型Whitney映射.

问题[1] 给定一连续统 X，对任一Whitney映射 $\omega:2^X\to[0,\omega(X)]$，是否存在一个同胚 $\varphi:[0,\omega(X)]\to[0,\infty)$，使 $\varphi\circ\omega$ 是一个 $(*)$ 型Whitney映射？

首先给出一些预备性结果.

命题1 如果 $\varphi:[0,\omega(X)]\to[0,\infty)$ 是使 $\varphi\circ\omega$ 为Whitney映射的同胚，则对 $\alpha<\beta$，$\alpha,\beta\in[0,\omega(X)]$，必有 $\varphi(\alpha)<\varphi(\beta)$.

---

* **收稿日期**：1996-09-16
基金项目：黑龙江省自然科学基金资助项目(A9619)
作者简介：陈尔明(1951-)，男，吉林省长春市人，硕士，副教授.

证明 因为 $\varphi\circ\omega$ 是 Whitney 映射，那么对 $x\in X$，有 $\varphi\circ\omega(\{x\})=0$. 而 $\omega(\{x\})=0$. 故 $\varphi(0)=0$，如果 $\alpha<\beta$ 时，有 $\varphi(\alpha)\geqslant\varphi(\beta)$，则由连续函数的介值定理，有 $\beta'\in[0,\alpha]$，使

$$\varphi(\beta')=\varphi(\beta).$$

命题2 如果存在同胚 $\varphi:[0,\omega(x)]\to[0,\infty)$，使对于一连续统 X 上的 Whitney 映射 ω，$\varphi\circ\omega$ 是 $(*)$ 型的 Whitney 映射，则存在同胚 φ'，使 $\varphi'\circ\omega$ 也是 $(*)$ 型的 Whitney 映射，且对固定的 $A,B\in 2^X$，$A\subsetneqq B$，有

$$\varphi'\circ\omega(B)-\varphi'\circ(A)=\omega(B)-\omega(A).$$

证明 设 $\omega(B)-\omega(A)=k$. 如果 $\varphi\circ\omega(B)-\varphi\circ\omega(A)=k'$. 令 $\frac{k}{k'}=\lambda$. 由命题1可知 $\lambda>0$. 设 $\varphi'=\lambda\varphi$，则

$$\varphi'\circ\omega(B)-\varphi'\circ\omega(A)=\lambda\varphi\circ\omega(B)-\lambda\varphi\circ\omega(A)=\lambda k'=k=\omega(B)-\omega(A).$$

由 $\varphi'=\lambda\varphi$，可知 φ' 也是 Whitney. 再由 $\varphi\circ\omega(\beta\cup C)-\varphi\circ\omega(B)\leqslant\varphi\circ\omega(A\cup C)-\varphi\circ\omega(A)$. $\lambda>0$，得

$$\lambda\varphi\circ\omega(B\cup C)-\lambda\varphi\circ\omega(B)\leqslant\lambda\varphi\circ\omega(A\cup C)-\lambda\varphi\circ\omega*(A).$$

即

$$\varphi'\circ\omega(B\cup C)-\varphi'\circ\omega(B)\leqslant\varphi'\circ\omega(A\cup C)-\varphi'\circ\omega(A).$$

这说明 $\varphi'\circ\omega$ 也是 $(*)$ 型 Whitney 映射.

例 取实数空间的子空间 $E=\{x\,|\,|x|\leqslant 1\}$，它是连续统. 考虑超空间 2^E 中的子空间 $\mathfrak{M}$ 上的一 Whitney 映射扩张成 2^E 上的 Whitney 映射，然后证明对此 Whitney 映射不存在前面问题中所要求的同胚 φ.

令 $\mathfrak{M}=\{E,A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots;B_1,B_2,\cdots,B_n,\cdots:C_1,C_2,D_1,D_2,D_3\}$，其中

$$A_1=\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots,\frac{1}{n},\cdots\}\cup\{0,-1\},$$

$$A_2=\{\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\cdots,\frac{1}{n},\cdots\}\cup\{0,-1\},$$

$$A_3=\{\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5},\cdots,\frac{1}{n},\cdots\}\cup\{0,-1\},$$

…… ……

$$A_n=\{\frac{1}{n},\frac{1}{n+1},\frac{1}{n+2},\cdots\}\cup\{0,-1\},$$

…… ……

$$B_1=\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots,\frac{1}{n},\cdots\}\cup\{0,-\frac{1}{2}\},$$

$$B_2=\{\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\cdots,\frac{1}{n},\cdots\}\cup\{0,-\frac{1}{2}\},$$

$$B_3=\{\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5},\cdots,\frac{1}{n},\cdots\}\cup\{0,-\frac{1}{2}\},$$

…… ……

$$B_n=\{\frac{1}{n},\frac{1}{n+1},\frac{1}{n+2},\cdots\}\cup\{0,-\frac{1}{2}\},$$

…… ……

$$C_1=\{0,-1\},\quad C_2=\{0,-\frac{1}{2}\},$$

$$D_1=\{0\},\quad D_2=\{-1\},\quad D_3=\{-\frac{1}{2}\}.$$

令

$$\omega(E)=2,\omega(B_1)=\frac{1}{2}+1,$$

$$\omega(A_1)=\frac{1}{4}+1,\quad \omega(B_2)=\frac{1}{4}+1,$$

$$\omega(A_2)=\frac{1}{8}+1,\quad \omega(B_3)=\frac{1}{8}+1,$$

$$\omega(A_3)=\frac{1}{16}+1,\quad \omega(B_4)=\frac{1}{16}+1,$$

$$\cdots\quad\cdots$$

$$\omega(A_n)=\frac{1}{2^{n+1}}+1,\quad \omega(B_n)=\frac{1}{2^n}+1,$$

$$\cdots\quad\cdots$$

$$\omega(C_1)=1,\quad \omega(C_2)=1,$$

$$\omega(D_1)=\omega(D_2)=\omega(D_3)=0.$$

经过验证可知,如果 $X,Y\in\mathfrak{M},X\subsetneqq Y$,则 $\omega(X)<\omega(Y)$. $\omega(D_1)=\omega(D_2)=\omega(D_3)=0$. 所以,如果能够证明 ω 在 $\mathfrak{M}$ 上连续,ω 即为 $\mathfrak{M}$ 上的 Whitney 映射.

首先,说明在 Hausdorff 度量下,$\mathfrak{M}$ 只有二个聚点 C_1,C_2. 但 $C_1,C_2\in\mathfrak{M}$,故 $\mathfrak{M}$ 在 2^E 中为闭集.

为证明 ω 为连续映射,只需讨论 C_1,C_2 点的处的情形. 对任意的 $X\in\mathfrak{M},H(C_i,X)<\frac{1}{n}$ 时,$|\omega(C_i)-\omega(X)|<\frac{1}{n}$. 所以 ω 为连续映射.

由于 $\mathfrak{M}$ 是 2^E 的闭子空间,可以应用[2]中的扩张定理 3.1,把 ω 扩张到 2^E 上. 仍记其为 ω.

如果存在同胚 $\varphi:[0,\omega(E)]\to[0,+\infty)$,使得 $\varphi\circ\omega$ 是(*)型 Whitney 映射. 则由命题 2,有同胚 ϕ 使得 $\phi\circ\omega$ 是(*)型的,则有

$$\phi\circ\omega(B_n\cup C)-\phi\circ\omega(A_n\cup C)\leqslant\phi\circ\omega(B_n)-\phi\circ\omega(A_n).$$

令 $C=\{\frac{1}{n-1}\}$,得

$$\begin{aligned}\phi\circ\omega(B_{n-1})-\phi\circ\omega(A_{n-1})&=\phi\circ\omega(B_n\cup C)-\phi\circ\omega(A_n\cup C)\\&\leqslant\phi\circ\omega(B_n)-\phi\circ\omega(A_n),\end{aligned}$$

那么

$$\begin{aligned}\phi\circ\omega(B_1)&=\sum_{n=1}^{N}[\phi\circ\omega(B_n)-\phi\circ\omega(B_{n+1})]+\phi\circ\omega(B_{N+1})\\&=\sum_{n=1}^{N}[\phi\circ\omega(B_n)-\phi\circ\omega(A_n)]+\phi\circ\omega(B_{N+1})\geqslant N\cdot\frac{1}{4},\end{aligned}$$

即 $\phi\circ\omega(B_1)\geqslant\frac{N}{4}$,由于此事对任意自然数 N 都成立,所以在映射 $\phi\circ\omega$ 之下的 B_1 的值无法定义,矛盾. 这说明原问题中要求的同胚 φ 并不是在所有的情形下都存在. 这样否定的解决了此问题.

参考文献：

[1] WLODZIMIERZ J C. *A metric on Hyperspaces defined by whitney maps* [J]. Proc. of the American Math. Society, Vol. 94, No. 3, July 1985.

[2] WARD L E. Jr. *Extending whitney maps* [J]. Pacific Journal of Mathematics, 1981, **93**(2): 465—469.

[3] CARRUTH J H. *A note on partially ordered compacta* [J]. Pacific Journal of Mathematics, 1968, **24**(2): 229—231.

An Open Question Concerning Whitney Maps on Hyperspaces

CHEN Er-ming

(Dept. of Math., Qiqihar University, 161006)

Abstract: In the paper, we discuss Whitney maps on hyperspaces, and provide a counter example so that an open question is solved.

Key words: hyperspaces; Whitney maps; homeomorphism.