第20卷第1期 数学研究与评论 Vol. 20 No. 1
2000年2月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Feb. 2000

交换子空间格代数的自同构与插值性质*

赵 君 喜
(南京邮电学院应用数理系，210003)

摘 要:本文第一部分用CSL序区间投影集上的偏序给出CSL代数自同构为拟空间实现的一个充分条件,作为推论,证明了代数自同构是拟空间实现的.第二部分,给出CSL的序积与序和格代数的紧及有限插值性质,由此可得出一些非完全分配CSL代数的插值性质.

关键词:交换子空间格;交换子空间格代数;自同构;插值.
分类号:AMS(1991) 47D25/CLC O175.4
文献标识码:A **文章编号**:1000-341X(2000)01-0113-06

1 引 言

交换子空间格(简称CSL)代数的自同构及其性质的刻画是一个基本问题.近年来许多学者在这方面做了相当深入的工作.文[7]证明了完全分配的CSL代数的一个自同构是拟空间实现的充要条件是它是保秩的,并给出了一些CSL代数具有非拟空间实现的自同构.然而,格的性质与相应CSL代数的自同构拟实现性之间的关系刻划仍是困难的问题.本文用CSL引出的区间投影集上的偏序性质给出CSL代数的自同构是拟空间实现的一个充分条件,证明了树代数的每一自同构是拟空间实现的.

关于CSL代数的插值特征,已有许多深刻的结果.但现有的结果都局限于CSL的完全分配性这一关键性条件.我们这里用序和及序积给出一些非完全分配CSL代数的插值性质.下面,以H表示一个可分复Hilbert空间,$\mathscr{L}$表示H上一个完备的直交投影格,且包含0与单位算子I,H上的有界线性算子代数记为$B(H)$,$\mathrm{alg}\mathscr{L}=\{T\in B(H):TP=PTP$ 对任意 $P\in\mathscr{L}\}$为$\mathscr{L}$对应的CSL代数.

2 CSL代数的自同构

对于$P,Q\in\mathscr{L},P>Q$,称$E=P-Q$为$\mathscr{L}$的一个区间.设E,F是$\mathscr{L}$的两个区间,若$EB(H)F\subseteq\mathrm{alg}\mathscr{L}$,则记$F<E$或$E>F$.容易验证,$<$是$\mathscr{L}$区间集上的一个偏序.对于$\mathscr{L}$的互异区间$E_1,E_2,\cdots,E_n$($n\geqslant4$且$n$为偶数),若$E_0=E_n$且$E_{2k-1}<E_{2k}>E_{2k+1}$,$1\leqslant k\leqslant\frac{n}{2}$($E_{n+1}=E_1$),

* 收稿日期:1996-10-07
作者简介:赵君喜(1963-),男,陕西人,博士,南京邮电学院副教授.

称$\{E_1,E_2,\cdots,E_n\}$是长度大于 n 的循环. 对于这样一个长度大于 4 的循环,若有 i_0,j_0 使 $i_0\neq j_0\pm 1$ 且存在真子区间 $0\neq E\leqslant E_{j_0}$,$0\neq F\leqslant E_{i_0}$,满足 $E\succ F$,则称$\{E_1,E_2,\cdots,E_n\}$是可插的,$E\succ F$ 是一个部分弦. 对于一个长度为 4 的循环 $E_0\prec F_0\succ E_1\prec F_1\succ E_0$,若存在 $\mathscr{L}$ 的非零区间 $E_i'\leqslant E_i$,$F_i'\leqslant F_i$ 及 G,$i=0,1$ 使得 $F_i'\succ G\succ E_i'$,$i=0,1$,称$\{E_0,F_0,E_1,F_1\}$是可插的. 对于 $P\in\mathscr{L}$,记 $P_-=\vee\{Q\in\mathscr{L}:Q\ngeqq P\}\neq 0$,则 $P_-^{\perp}\succ P$. 设$\{P_0,P_1,\cdots,P_n\}\subseteq\mathscr{L}$ 使得 $P_0=P_n$,$P_0\succ P_1\prec P_2\succ\cdots\prec P_n$,$(P_{2k})_-^{\perp}\neq 0$,$0\leqslant k\leqslant\frac{n}{2}$($n$ 为偶数且 $n\geqslant 4$),我们称$\{P_0,P_1,P_2,\cdots,P_n\}$是 $\mathscr{L}$ 中的一个长度为 n 的链. 对于 $\mathscr{L}$ 的一个链$\{P_0,P_1,P_2,\cdots,P_n\}$,若存在$\{Q_1,Q_2,\cdots,Q_n\}\subseteq\mathscr{L}$ 使得有不交子集$\{i_1,i_2,\cdots,i_n\}$,$\{j_1,j_2,\cdots,j_n\}\subset\{1,2,\cdots,n\}$,且$\{Q_1,Q_2,\cdots,Q_j,P_{i_1},P_{i_2},\cdots,P_{i_k}\}$与$\{Q_1,Q_2,\cdots,Q_j,P_{j_1},P_{j_2},\cdots,P_{j_k}\}$组成长度小于 n 的链,则称$\{P_0,P_1,P_2,\cdots,P_n\}$是可约的. 易知一个可约链是由较小的链"拼合"而成的. 有关 CSL 的序区间的内容可详见文[6]. 对于 $\mathrm{alg}\mathscr{L}$ 的一个自同构 φ,若存在一个单的稠定闭算子 A 使得 $\varphi(T)Ay=ATy$,对任意的 $y\in D(T)$,则称 φ是拟空间实现的. 由[7]中定理 4.1 的证明可以得到.

命题 2.1　设 $\mathscr{L}$ 是一个完全分配的 CSL,若 $\mathscr{L}$ 中的每个链都是可约的,则 $\mathrm{alg}\mathscr{L}$ 的任意自同构都是拟空间实现的.

定理 2.2　设 $\mathscr{L}$ 是一个完全分配的 CSL,若 $\mathscr{L}$ 的每一循环都是可插的,则 $\mathrm{alg}\mathscr{L}$ 的每一个自同构都是拟空间实现的.

证明　由命题 2.1,只需证明 $\mathscr{L}$ 不存在不可约的非平凡链. 假设 $\mathscr{L}$ 存在一非平凡的不可约链$\{P_1,P_2,\cdots,P_n\}$($n\geqslant 4$). 设 $P_n\succ P_1\prec P_2\succ\cdots\prec P_n$,由不可约性知,对于不同的 k,m,

$$P_{2k+1}\wedge P_{2m+1}=0,\ (P_{2k}\vee P_{2m})_-^{\perp}=0,$$

这里约定 $P_i=P_{i|\mathrm{mod}(n)}$. 由于$(P_{2i})_-^{\perp}\succ P_{2i}$,对于任意 i,所以$(P_{2i})_-^{\perp}\succ P_{2i-1}$及 P_{2i+1}. 记 $E_{2i}=(P_{2i})_-^{\perp}\neq 0$. 于是就得到 $\mathscr{L}$ 的一个循环 $E_n\succ P_1\prec E_2\succ\cdots\prec E_n$. 当 $n=4$ 时,由$(P_1\vee P_3)_-^{\perp}=0$ 知 $E_4\succ P_1\prec E_2\succ P_3\prec E_4$ 不可插. 当 $n>4$ 时,证明上面这个循环不可插.

事实上,对于不同的 k,m,由 $P_{2k+1}\wedge P_{2m+1}=0$ 知 P_{2k+1}及 P_{2m+1}之间没有部分弦. 因为,若存在非零区间 $E\leqslant P_{2k+1}$,$F\leqslant P_{2m+1}$使 $E\succ F$,那么 $P_{2k+1}\geqslant F$. 从而 $P_{2k+1}\wedge P_{2m+1}\geqslant F\neq 0$. 对于不同的 k,m,由

$$(P_{2k}\vee P_{2m})_-=(P_{2k})_-\vee(P_{2m})_-=I,$$

有

$$(P_{2k})_-^{\perp}\wedge(P_{2m})_-^{\perp}=(P_{2k}\vee P_{2m})_-^{\perp}=0,$$

同样知 E_{2k}与 E_{2m}之间没有部分弦.

令 m 为一偶数,k 为一奇数,使 $m\neq k\pm 1(\mathrm{mod}n)$,我们断言 E_m 与 P_k 之间没有部分弦. 若不然,则存在非零区间 $E\leqslant E_m$,$F\leqslant P_k$ 使 $E\prec F$ 或 $F\succ E$. 假设前者成立,由 $E_m\succ P_m$,则有 $E\succ P_m$. 于是 $F\succ P_m\succ P_{m+1}$,这与 P_k 和 P_{m+1}之间没有部分弦矛盾. 假若 $F\prec E$,令 $P_F=\wedge\{P\in\mathscr{L}:P\geqslant F\}$. 则对于任意一 $P\in\mathscr{L}$ 使 $P\geqslant F$,必须有 $P\geqslant P_F$. 而若 $P\ngeqq F$,$P\in\mathscr{L}$,则有 $P\ngeqq P_F$,所以对于 $P\in\mathscr{L}$,$P\ngeqq F$ 当且仅当 $P\ngeqq P_F$ 对于任意一 $P\in\mathscr{L}$ 使 $P\ngeqq P_F$,由 $P\geqslant PE\succ F$ 知 $PE=0$. 于是有 $E(P_F)_-=0$,即 $E\leq(P_F)_-^{\perp}$. 这样 $E\succ P_F$. 令 $P_m'=P_m\vee P_F$. 则由$(P_m')_-=(P_m)_-\vee(P_F)_-$知

$$(P_m')_-^{\perp}=(P_m)_-^{\perp}\wedge(P_F)_-^{\perp}\geqslant E\neq 0.$$

易知$\{P_1,P_2,\cdots,P_{m-1},P_m',P_F,P_{k+1},\cdots,P_n\}$与$\{P_m',P_{m+1},\cdots,P_{k-1},P_F\}$构成长度小于 n 的链.

这与$\{P_1,P_2,\cdots,P_n\}$是不可约的相矛盾．所以就证明了 E_m 与 P_k 之间没有部分弦．

这样，$E_n > P_1 < E_2 > \cdots < E_n$ 是一个长度 $n\geqslant 4$ 的不可插的循环，与 $\mathscr{L}$ 是可插的矛盾．由命题 2.1，alg$\mathscr{L}$ 的每个自同构都是拟空间实现的．

对于一个完全分配的 CSL $\mathscr{L}$，如果 $\mathscr{L}$ 的区间组成的循环都是可插的．称 $\mathscr{L}$ 是可插的，全序格(即套)以及交换 Boolean 格都是可插的．文[6]利用 $\mathscr{L}$ 引出其序区间投影集上一个偏序，定义了一类树代数，它具有许多类似全序格代数的性质，利用上述定理，有：

推论 2.3 对于可插的 CSL $\mathscr{L}$，alg$\mathscr{L}$ 的每一自同构都是拟空间实现的．

推论 2.4 树(tree)(定义见文[6])代数的自同构都是拟空间实现的．

3 CSL 代数的插值性质

对于给定的算子 $A,B\in B(H)$及向量 $x,y\in H$，方程 $XA=B$ 与 $Xx=y$ 在 alg$\mathscr{L}$ 中的可解性问题已被一些学者作了研究(见[2,9,10]等)．在[10]中，Hopenwasser 讨论了 CSL 代数的有限秩插值性质，对上述方程，给出了有限宽 CSL 代数的有限秩插值特征，但对一般 CSL 代数，上述方程的紧性及有限秩插值性质仍是未解决的问题．文[2]对完全分配 CSL 代数给出了 $Xx=y$ 的有限秩及紧插值性质．我们下面讨论由 CSL 序和与序积形成的 CSL 代数的插值性质，由此可得到一些非完全分配及非有限宽 CSL 代数的插值性质．

设 $\mathscr{L}_1,\mathscr{L}_2$ 是两个 CSL，

$$\mathscr{L}_1\times\mathscr{L}_2=\{P\oplus Q:P\in\mathscr{L}_1,Q\in\mathscr{L}_2\},$$
$$\mathscr{L}_1+\mathscr{L}_2=\{P\oplus 0:P\in\mathscr{L}_1\}\cup\{I_1\oplus F:F\in\mathscr{L}_2\},$$

I_1 是 $\mathscr{L}_1$ 的支撑空间上的单位算子．$\mathscr{L}_1\times\mathscr{L}_2$ 与 $\mathscr{L}_1+\mathscr{L}_2$ 分别称为 $\mathscr{L}_1$ 与 $\mathscr{L}_2$ 的序积与序和．对于可数多个 CSL 归纳地定义其序积与序和．令 $P\in\mathscr{L}$，记 $P_-=\vee\{Q\in\mathscr{L}:Q\ngeq P\}$．对于一个 CSL $\mathscr{L}$，若方程 $Fx=y$ 在 alg$\mathscr{L}$ 中存在有限秩算子为解的充要条件是，存在有限多个投影 $P_1,P_2,\cdots,P_n\in\mathscr{L}$ 使$(P_i)_-^\perp\neq 0$，$1\leqslant i\leqslant n$ 且$(P_1\vee P_2\vee\cdots\vee P_n)y=y$，我们则称 alg$\mathscr{L}$ 具有有限秩插值性质；若方程 $Ax=y$ 在 alg$\mathscr{L}$ 中有紧算子解的充要条件是 $\varphi_{x,y}(P)=\dfrac{\|P^\perp y\|}{\|P^\perp x\|}$ $\left(\dfrac{0}{0}\text{定义为 }0\right)$ 在 $\mathscr{L}$ 上是(强)连续的并且有界，则称 alg$\mathscr{L}$ 具有紧插值性质．由文[2]与[10]知，当 $\mathscr{L}$ 是完全分配的时，alg$\mathscr{L}$ 具有有限秩插值性质和紧插值性质．

定理 3.1 设 $\mathscr{L}_1,\mathscr{L}_2,\cdots$是一列 CSL，$\mathscr{L}=\mathscr{L}_1\times\mathscr{L}_2\times\cdots$，则 alg$\mathscr{L}$ 具有紧(有限秩)插值性质当且仅当每个 $\mathscr{L}_i(i\geqslant 1)$具有紧(有限秩)插值性质．

证明 仅证紧插值的情形，有限秩插值的证明类似．

设 alg$\mathscr{L}$ 具有紧插值性质．对于任意的一个 $i\geqslant 1$ 及 $x_i,y_i\in H_i(\mathscr{L}_i)$ 的支撑空间)，使 $\varphi_{x_i,y_i}(P_i)=\dfrac{\|P_i^\perp y_i\|}{\|P_i^\perp x_i\|}$ 在$\mathscr{L}_i$上(强)连续且有界．我们证明存在紧算子$A_i\in$ alg$\mathscr{L}_i$使$A_ix_i=y_i$，并且对任意的 $\varepsilon>0$，可选 A_i 使 $\|A_i\|<\mathrm{Sup}\{\varphi_{x_i,y_i}(P_i):P_i\in\mathscr{L}_i\}+\varepsilon$.

对于固定的 i，取 $x=0\oplus\cdots+0\oplus x_i\oplus 0\cdots$，$y=0\oplus\cdots\oplus y_i\oplus 0\cdots$．由假设知 $\varphi_{x,y}=\dfrac{\|P^\perp y\|}{\|P^\perp x\|}$ $(P=P_1\oplus P_2\oplus\cdots)$在 $\mathscr{L}$ 上有界且(强)连续．再由对 alg$\mathscr{L}$ 的假设，对任意给定的 $\varepsilon>0$ 存在一

个紧算子 $A=A_1\oplus A_2\oplus\cdots\in \mathrm{alg}\mathscr{L}$ 使 $Ax=y$，从而 $Ax_i=y_i$，并且有

$$\|A_i\|\leqslant\|A\|\leqslant \mathrm{Sup}\{\varphi_{x,y}(P):P\in\mathscr{L}\}+\varepsilon\leqslant \mathrm{Sup}\{\varphi_{x_i,y_i}(P),P\in\mathscr{L}_i\}+\varepsilon.$$

显然，A_i 是紧算子.

反过来，设对每一 $i\geqslant 1$，$\mathrm{alg}\mathscr{L}_i$ 具有紧插值性质. 任取 $x=x_1\oplus x_2\oplus\cdots$ 及 $y=y_1\oplus y_2\oplus\cdots\in H_1\oplus H_2\oplus\cdots$ 使 $\varphi_{x,y}(P)=\dfrac{\|P^{\perp}y\|}{\|P^{\perp}x\|}$ 在 $\mathscr{L}$ 上(强)连续且有界，特别地，对每一 $i\geqslant 1$ 有 $\varphi_{x_i,y_i}(P_i)$ 在 $\mathscr{L}_i$ 上(强)连续并且有界. 于是对每一 $i\geqslant 1$ 及 $\varepsilon>0$，存在紧算子 $K_i\in\mathrm{alg}\mathscr{L}_i$ 使 $K_ix_i=y_i$，$\|K_i\|<\mathrm{Sup}\{\varphi_{x_i,y_i}(P_i):P_1\in\mathscr{L}_i\}+\varepsilon$. 令 $K=K_1\oplus K_2\oplus\cdots$，则 $K\in\mathrm{alg}\mathscr{L}$，$Kx=y$ 并且 $\|K\|=\mathrm{Sup}\|K_i\|\leqslant\mathrm{Sup}\{\varphi_{x_i,y_i}(P_i):P_i\in\mathscr{L}_i,i\geqslant 1\}+\varepsilon$. 下证 K 是一个紧算子.

由 $\varphi_{x,y}(P)$ 在 $\mathscr{L}$ 上的连续性，以及 $\varphi_{x,y}(I)=0$ 可知，当 $P\xrightarrow{\mathrm{SOT}}I$ 时，$\varphi_{x,y}(P)\to 0$. 令 $\{P_i\}_{i=1}^{\infty}$ 是一个投影列使 $P\in\mathscr{L}_i$，$i\geqslant 1$. 对于任意的 $n\geqslant 1$，取 $Q_n(\{P_i\})=I_1\oplus I_2\oplus\cdots\oplus I_{n-1}\oplus P_n\oplus I_{n+1}\oplus\cdots$ 及任意一 $x'=x_1'\oplus x_2'\oplus\cdots\in H$，则有

$$\begin{aligned}\|Q_n(\{P_i\})x'-x'\| &=\|(x_1'\oplus\cdots\oplus x_{n-1}'\oplus P_nx_n'\oplus x_{n-1}'\oplus\cdots)-(x_1'\oplus x_2'\oplus\cdots)\|\\ &=\|0\oplus\cdots\oplus 0\oplus(P_n-I_n)x_n'\oplus 0\cdots\|\\ &=\|P_n^{\perp}x_n'\|\leqslant\|x_n'\|,\end{aligned}$$

所以 $\{Q_n(\{P_i\})\}_{n=1}^{\infty}$ 关于 $\{P_i\}$ 的选择是一致强收敛于 $I_1\oplus I_2\cdots=I$(H 上恒等算子). 从而由 $\varphi_{x,y}(P)\to 0(P\xrightarrow{\mathrm{SOT}}I)$. 对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $N>1$ 使得当 $n>N$ 时，对任意的序列 $\{P_i\}_{i=1}^{\infty}(P_i\in\mathscr{L}_i)$ 有

$$\varphi_{x,y}(Q_n(\{P_i\}))=\frac{\|Q_n^{\perp}(\{P_i\}y\|}{\|Q_n^{\perp}(\{P_i\})x\|}=\frac{\|P_n^{\perp}y_n\|}{\|P_n^{\perp}x_n\|}<\varepsilon,$$

因此，当 $n>N$ 时，$A_n=\mathrm{Sup}\left\{\dfrac{\|P^{\perp}y_n\|}{\|P^{\perp}x_n\|}:P_n\in\mathscr{L}_n\right\}\leqslant\varepsilon$，即 $A_n\to 0$. 于是我们就有 $\|K_n\|\to 0(n\to\infty)$. 所以 $K=K_1\oplus K_2\oplus\cdots$ 是 $\mathrm{alg}\mathscr{L}$ 中的紧算子.

定理 3.2 设 $\mathscr{L}_1,\mathscr{L}_2$ 是两个交换的子空间格. $\mathrm{alg}(\mathscr{L}_1+\mathscr{L}_2)$ 具有紧插值性质当且仅当 $\mathrm{alg}\mathscr{L}_1$ 与 $\mathrm{alg}\mathscr{L}_2$ 均有紧插值性质；$\mathrm{alg}(\mathscr{L}_1+\mathscr{L}_2)$ 具有限秩插值性质当且仅当 $\mathrm{alg}\mathscr{L}_2$ 具有有限秩插值性质

证明 为证明第一部分，设 $\mathrm{alg}(\mathscr{L}_1+\mathscr{L}_2)$ 具有紧插值性质. 令 $x_1,y_1\in H_1$ 使 $\varphi_{x_1,y_1}(P_1)=\dfrac{\|P_1^{\perp}y_1\|}{\|P_1^{\perp}x_1\|}(P_1\in\mathscr{L}_1)$ 在 $\mathscr{L}_1$ 上是有界的和强连续的. 记 $x=x_1\oplus 0$，$y=y_1\oplus 0$，则 $\varphi_{x,y}(P)=\dfrac{\|P_1^{\perp}y_1\|}{\|P_1^{\perp}x_1\|}$ 或 0，这里 $P=P_1\oplus 0$ 或 $P=I_1\oplus P_2(P_1\in\mathscr{L}_1,P_2\in\mathscr{L}_2)$. 因此，$\varphi_{x,y}$ 在 $\mathscr{L}_1+\mathscr{L}_2$ 上有界且强连续. 由假设，存在一个紧算子 $K\in\mathrm{alg}(\mathscr{L}_1+\mathscr{L}_2)$ 使 $Kx=y$. 令 $K=\begin{pmatrix}K_1 & 0\\ 0 & K_2\end{pmatrix}$，则易知，$K_1x_1=y_1$ 且 K_1 为 $\mathrm{alg}\mathscr{L}_1$ 中的紧算子. 对于任意的 $\varepsilon>0$，由假设可使

$$\|K_1\|\leqslant\mathrm{Sup}\{\varphi_{x_1,y_1}(P_1):P_1\in\mathscr{L}_1\}+\varepsilon$$

成立. 类似可证 $\mathrm{alg}\mathscr{L}_2$ 也具有紧插值性质.

反过来，设 $\mathrm{alg}\mathscr{L}_1$ 与 $\mathrm{alg}\mathscr{L}_2$ 都具有紧插值性质. 对于 $x=x_1\oplus x_2$，$y=y_1\oplus y_2\in H$ 使 $\varphi_{x,y}(P)$ 在 $\mathscr{L}_1+\mathscr{L}_2$ 上是有界的和强连续的，由

$$\frac{\| P^{\perp} y \|}{\| P^{\perp} x \|}=\begin{cases}\dfrac{\| P_1^{\perp} y_1 \oplus y_2 \|}{\| P_1^{\perp} x_1 \oplus x_2 \|}, & P=P_1 \oplus 0, P_1 \in \mathscr{L}_1, \\ \dfrac{\| P_2^{\perp} y_2 \|}{\| P_2^{\perp} x_2 \|}, & P=I_1 \oplus P_2, P_2 \in \mathscr{L}_2,\end{cases}$$

知 $\varphi_{x_1,y_1}(P_1)$，$\varphi_{x_2,y_2}(P_2)$分别在 $\mathscr{L}_1$，$\mathscr{L}_2$ 上有界且强连续. 再由假设，存在一个紧算子 $K_1\in \operatorname{alg}\mathscr{L}_1$，$K_2\in\operatorname{alg}\mathscr{L}_2$ 使得 $K_1x_1=y_1$，$K_2x_2=y_2$. 显然，

$$F=K_1\oplus K_2\in\operatorname{alg}(\mathscr{L}_1+\mathscr{L}_2),$$

并且

$$F(x_1\oplus x_2)=y_1\oplus y_2.$$

对于任意的 $\varepsilon>0$，由 $\operatorname{Sup}\{\varphi_{x,y}(P):P\in\mathscr{L}_1+\mathscr{L}_2\}\geqslant\operatorname{Sup}\{\varphi_{x_1,y_1}(P_1)\}:P_1\in\varphi_1\}$ 或 $\operatorname{Sup}\{\varphi_{x_2,y_2}(P_2):P_2\in\varphi_2\}$，可选 K_1，K_2 使

$$\| K_1\oplus K_2 \|\leqslant\operatorname{Sup}\{\varphi_{x,y}(P):P\in\mathscr{L}_1+\mathscr{L}_2\}+\varepsilon.$$

于是就证明了 $\operatorname{alg}(\mathscr{L}_1+\mathscr{L}_2)$具有紧插值性质.

下面再证明后一情形，首先设 $\operatorname{alg}\mathscr{L}_2$ 具有有限秩插值性质，设 $F\in\operatorname{alg}(\mathscr{L}_1+\mathscr{L}_2)$为一有限秩算子，$x=x_1\oplus x_2$，$y=y_1\oplus y_2\in H$ 满足 $Fx=y$. 我们把 F 关于分解 $H_1\oplus H_2$ 写成算了矩阵 $\begin{pmatrix}F_{11} & F_{12}\\ 0 & F_{12}\end{pmatrix}$，这里 $F_{11}\in\operatorname{alg}\mathscr{L}_1$，$F_{22}\in\operatorname{alg}\mathscr{L}_2$，则

$$y_1=F_{11}x_1+F_{12}x_2, y_2=F_{22}x_2.$$

由假设，存在 $P_1,P_2,\cdots,P_n\in\mathscr{L}_2$ 使$(P_i)_-^{\perp}\neq 0$，$1\leqslant i\leqslant n$ 且$(\vee_{i=1}^{n}P_i)y_2=y_2$. 因为

$$(I_1\oplus 0)_-^{\perp}\neq 0, (I_1\oplus P_i)_-^{\perp}=0\oplus(P_i)_-^{\perp}\neq 0, 1\leqslant i\leqslant n,$$

所以

$$y_1\oplus y_2=(F_{11}x_1+F_{12}x_2)\oplus F_{22}x_2\in[(I_1\oplus 0)\vee(I_1\oplus P_1)\vee\cdots\vee(I_1\oplus P_n)]H,$$

即 $\operatorname{alg}(\mathscr{L}_1+\mathscr{L}_2)$具有有限秩插值性质.

其次，设 $\operatorname{alg}(\mathscr{L}_1+\mathscr{L}_2)$具有有限秩插值性质. 设 $x_2,y_2\in H_2$ 及 $F_2\in\operatorname{alg}\mathscr{L}_2$ 是一个有限秩算子使得 $F_2x_2=y_2$. 令 $x=0\oplus x_2$，$y=0\oplus y_2$，$F=0\oplus F_2$，则 $Fx=y$. 由假设，存在 $P_1,P_2,\cdots,P_n\in\mathscr{L}_1+\mathscr{L}_2$ 使得

$$(P_i)_-^{\perp}\neq 0, 1\leqslant i\leqslant n \text{ 且 } y=(P_1\vee\cdots\vee P_n)y.$$

设$\{P_1,P_2,\cdots,P_n\}$中形式为 $I_1\oplus Q$ $(Q\in\mathscr{L}_2)$的投影全体为 $I_1\oplus Q_1$，$I_2\oplus Q_2$，$\cdots$，$I_1\oplus Q_k$，则

$$(Q_i)_-^{\perp}\neq 0, i\geqslant 1.$$

易知，

$$y_2=Q_1\vee Q_2\vee\cdots\vee Q_k y_2.$$

所以 $\operatorname{alg}\mathscr{L}_2$ 具有有限秩插值性质.

注　定理 3.1，3.2 不要求 CSL 的完全分配性，而当形成序和或序积的 CSL 中有非分配的时，相应的 CSL 就是非完全分配的. 但非完全分配 CSL 代数也可能具有某种插值性质，如 $\mathscr{L}^{\infty}$表示 $B(H)$的一个无原子的极大交换 Von Neumann 代数，则 $\operatorname{Lat}\mathscr{L}^{\infty}$是无原子的 Boolean CSL，从而是非分配的. 而 $\mathscr{L}^{\infty}$具有紧插值性质的. 于是由定理 3.1 可构造出非完全分配，非有限宽的，具有有限秩插值性质的 CSL.

作者感谢马吉溥教授给予的帮助.

参考文献：

[1] ANOUSSIS M, KATSOULIS E G etc. *Interpolation problems for ideals in nest algebras* [J]. Proc. Cambridge Phil. Soc. 1992, **111**: 151—160.

[2] ANOUSSIS M, KATSOUNLIS E G and POWER S C. *Compact solutions to an operaror in nest and CSL algebras* [J]. Indiana Univ, Math. J., 1994, **42**: 283—294.

[3] DAVIDSON K R. Nest Algebras, vol. 191, Pitman Reseach Notes in Mathematics, 1988.

[4] DAVIDSON K R and POWER S C. *Isometric automorphisms and homology for non-selfadjoint operator algebras* [J]. Quart. Math. J., 1991, **42**: 271—292.

[5] DAVIDSON K R. *When locally contrative representations are completely contractive*

[6] DAVIDSON K R. PAUSEN V J and POWER S C. *Tree algebras, semidiscreteness and dilation theory* [J]. Proc. London Math. Soc., 1994, **68**(3): 178—202.

[7] GILFEATHER F and MOORE R L. *Isomorphisms of certain CSL algebras* [J]. J. Funct. Anal., 1986, **67**: 264-291.

[8] GILFEAHER F, HOPENWASSER A and LARSON D. *Reflexive algebras with finite width lattices, tensor products* [J]. cohomology, compact perturbations, J. Funct. Anal., 1984, **55**: 176—193.

[9] HOPENWASSER A. *The equation $Tx=y$ in a reflexive algebras* [J]. Univ. Math. J., 1980, **29**: 124—126.

[10] HOPENWASSER A. *Hilbert-schmidt interpolation in CSL algebras* [J]. Illinois J. Math., 1989, **33**: 657—672.

[11] HOPENWASSER A and MOORE R. *Finite rank operators in reflexive operator algebras* [J]. J. London Math. Soc., 1983, **27**(2): 331—338.

Automorphisms and Interpolation Properties of CSL Algebras

ZHAO Jun-xi

(Dept. of App. Math. and Phy., Nanjing University of Posts and Telecommunications, 210003)

Abstract: In the first section, a sufficient condition under which every automorphism of a CSL algebra is quasi-spatial is given. As a corollary, it follows that every automorphism of a tree algebra defined in [6] is quasi-spatial. In the second section, we present the interpolation properties of compact and finite-rank operators in a CSL algebra corresponding to order product and order sum of CSL.

Key words: commutative subspace lattice; reflexive algebra; automorphism; interpolation.