亚纯 p 叶凸象函数的子类*

杨　定　恭
(苏州大学数学系，江苏 215006)

摘　要：本文引进单位圆盘内亚纯 p 叶凸象函数的新子类 $C(n,p,A,B)$ 和 $K(n,p,A,B)$，分别研究其包含关系与类中函数的积分变换等性质.

关键词：亚纯；p 叶；从属；积分.
分类号：AMS(1991) 30C45/CLC O174.51
文献标识码：A　　　**文章编号**：1000-341X(2000)02-0215-05

1　引　言

在[1]中 S. Ruscheweyh 定义了解析函数的"Ruscheweyh 导数"，其主要结果是利用这种有趣的微分算子建立解析单叶星象函数的新判别准则和研究类中函数的 Bernardi 积分变换(以卷积形式给出). 在此以后，许多学者相继引进和研究与 Ruscheweyh 导数有关的各种单叶或多叶解析函数类(例如[2]—[7]). 另一方面，对于定义在单位圆盘内以原点为极点的具有正系数的亚纯函数也有不少研究工作(例如[8]—[11]).

本文的目的是给出以原点为极点的亚纯 p 叶凸象函数的判别准则并讨论一类积分算子. 全文设 p 是正整数，n 是大于 $-p$ 的任一整数，$E_0=\{z:0<|z|<1\}$ 和 $E=\{z:|z|<1\}$.

定义 1　设 $\Sigma(p)$ 表示 E_0 内形为

$$f(z)=z^{-p}+\sum_{m=1-p}^{\infty}a_m z^m$$

的解析函数全体. 对于 $-1\leqslant A<B\leqslant 1$，若 $f\in\Sigma(p)$ 在 E 内满足

$$\frac{(D^{n+p}f(z))'}{(D^{n+p-1}f(z))'}\prec\frac{n+p+1}{n+p}-\frac{1+Az}{(n+p)(1+Bz)}, \tag{1}$$

这里记号 $\prec$ 表示从属，

$$D^{n+p-1}f(z)=\frac{(z^{n+2p-1}f(z))^{(n+p-1)}}{(n+p-1)!\;z^{p}}=z^{-p}+\sum_{m=1-p}^{\infty}\frac{(m+n+2p-1)!}{(n+p-1)!\;(m+p)!}a_m z^m,$$

称 f 在类 $C(n,p,A,B)$ 中.

定义 2　设 $T(p)$ 表示 E_0 内形为

$$f(z)=z^{-p}-|a_p|z^p+|a_{p+1}|z^{p+1}-|a_{p+2}|z^{p+2}+\cdots$$

* 收稿日期：1997-01-17
作者简介：杨定恭(1937-)，男，江苏常熟人，苏州大学教授.

的解析函数构成的类. 对于 $-B\leqslant A<B\leqslant 1$,若 $f\in T(p)$ 在 E 内满足从属关系(1),称 f 在类 $K(n,p,A,B)$ 中.

易知当 $n=1-p$ 有

$$D^{n+p-1}f(z)=f(z),\quad D^{n+p}f(z)=(p+1)f(z)+zf'(z). \tag{2}$$

如果 $f\in C(1-p,p,A,B)$,则

$$\mathrm{Re}\{-(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)})\}>p-1+\frac{1+A}{1+B}\geqslant 0\ (z\in E).$$

因此 $C(1-p,p,A,B)\subset\Sigma_K(p)$,这里 $\Sigma_K(p)=\{f\in\Sigma(p):\mathrm{Re}\{-(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\}>0(z\in E)\}$ 是亚纯 p 叶凸象函数类. 注意 $C(0,1,-1,1)$ 合于亚纯单叶凸象函数类 $\Sigma_K(1)$.

不难验证,对于 $0<|z|<R\leqslant 1$ 内形为 $g(z)=z^{-p}+\sum\limits_{m=1-p}^{\infty}b_mz^m$ 的解析函数和任一整数 $j\geqslant 1-p$ 有

$$z(D^{j+p-1}g(z))'=(j+p)D^{j+p}g(z)-(j+2p)D^{j+p-1}g(z). \tag{3}$$

2 类 $C(n,p,A,B)$

定理 1 若 $-1\leqslant A<B=1$,或若 $-1\leqslant A<B<1$ 且 $n\geqslant\max\{1-p,\frac{B-A}{1-B}-p\}$,则 $C(n+1,p,A,B)\subset C(n,p,A,B)$.

证明 设 $f\in C(n+1,p,A,B)$,按定义有

$$\left|\frac{(n+p+1)\{\frac{(D^{n+p+1}f(z))'}{(D^{n+p}f(z))'}-1\}}{B-A-B(n+p+1)\{\frac{(D^{n+p+1}f(z))'}{(D^{n+p}f(z))'}-1\}}\right|<1\quad(z\in E). \tag{4}$$

我们要从(4)推出(1). 由

$$\frac{(D^{n+p}f(z))'}{(D^{n+p-1}f(z))'}=\frac{n+p+1}{n+p}-\frac{1+Aw(z)}{(n+p)(1+Bw(z))} \tag{5}$$

定义的函数 $w(z)$ 在 E 内解析或亚纯,$w(0)=0$. 对数微分(5)的两端,然后利用(3)(置 $j=n,n+1$)以及(5)可得

$$(n+p+1)\frac{(D^{n+p+1}f(z))'}{(D^{n+p}f(z))'}=n+p+2-\frac{1+Aw(z)}{1+Bw(z)}+\frac{(B-A)zw'(z)}{(1+Bw(z))[n+p+(B(n+p)+B-A)w(z)]}. \tag{6}$$

现在证明 $w(z)$ 在 E 内解析且 $|w(z)|<1$. 假若不然,必有点 $z_0\in E_0$ 使 $\max\limits_{|z|\leqslant|z_0|}|w(z)|=|w(z_0)|=1$. 根据熟知的 Jack 引理,存在 $\lambda\geqslant 1$ 使得 $z_0w'(z_0)=\lambda w(z_0)$. 于是,当 $z=z_0$ 从(6)得

$$\left|\frac{(n+p+1)\{\frac{(D^{n+p+1}f(z))'}{(D^{n+p}f(z))'}-1\}}{B-A-B(n+p+1)\{\frac{(D^{n+p+1}f(z))'}{(D^{n+p}f(z))'}-1\}}\right|^2_{z=z_0}$$

$$=1+\frac{M(x)}{|(n+p)+(B(n+p-\lambda)+B-A)e^{i\theta}|^2}, \tag{7}$$

这里 $w(z_0)=e^{i\theta}, x=\cos\theta, M(x)=\lambda^2(1-B^2)+2\lambda[(1+B^2)(n+p)+B(B-A)]+2\lambda x[2B(n+p)+(B-A)]$.

由于 $M(x)$ 是线性函数，且在定理的条件下有 $M(1)>0$ 和 $M(-1)\geqslant 0$，故 $M(x)\geqslant 0(-1\leqslant x\leqslant 1)$. 这样，(7)与(4)是矛盾的，因此在 E 内 $|w(z)|<1$. 于是从(5)知 $f\in C(n,p,A,B)$. □

以下把 $C(n,p,2\alpha-1,1)$ 记作 $C_p(n,\alpha)$，$0\leqslant\alpha<1$. 根据定理 1 和包含关系立得

推论 1 (i) 对 $0\leqslant\alpha<1, C_p(n,\alpha)\subset\Sigma_K(p)$；

(ii) 若 $-1\leqslant A<B<1$ 且 $1+A\geqslant 2B$，则 $C(n,p,A,B)\subset\Sigma_K(p)$.

定理 2 设 c 是复数，$f\in C(n,p,A,B)$. 若 $-1\leqslant A<B=1$ 且 $\mathrm{Re}c>0$，或若 $-1\leqslant A<B<1$ 且 $\mathrm{Re}c\geqslant\frac{B-A}{1-B}$，则函数

$$F(z)=\frac{c}{z^{c+p}}\int_0^z t^{c+p-1}f(t)\mathrm{d}t \tag{8}$$

也在类 $C(n,p,A,B)$ 中.

证明 从 F 的定义知 $F\in\Sigma(p)$ 且满足

$$cD^{n+p-1}f(z)=(c+p)D^{n+p-1}F(z)+z(D^{n+p-1}F(z))'. \tag{9}$$

用

$$\frac{(D^{n+p}F(z))'}{(D^{n+p-1}F(z))'}=\frac{n+p+1}{n+p}-\frac{1+Aw(z)}{(n+p)(1+Bw(z))} \tag{10}$$

定义的函数 $w(z)$ 在 E 内解析或亚纯，$w(0)=0$.

利用(3)，(9)和(10)可得

$$(n+p)\frac{(D^{n+p}f(z))'}{(D^{n+p-1}f(z))'}=n+p+1-\frac{1+Aw(z)}{1+Bw(z)}+\frac{(B-A)zw'(z)}{(1+Bw(z))[c+(Bc+B-A)w(z)]}. \tag{11}$$

其余部分与定理 1 的证明的相应部分类似. 由于 f 属于 $C(n,p,A,B)$，根据(11)和 Jack 引理可推出在 E 内 $w(z)$ 解析且 $|w(z)|<1$. 于是由(10)知 $F\in C(n,p,A,B)$. □

定理 3 设 c 是复数且 $\mathrm{Re}c>0$. 若 $f\in\Sigma(p)$ 满足

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{(D^{n+p}f(z))'}{(D^{n+p-1}f(z))'}\right\}<1+\frac{1-\alpha}{n+p}\left\{1+\frac{2(\mathrm{Re}c+1-\alpha)}{(|c|+|c+2(1-\alpha)|)^2}\right\}\ (z\in E),$$

其中 $0\leqslant\alpha<1$，则

$$F(z)=\frac{c}{z^{c+p}}\int_0^z t^{c+p-1}f(t)\mathrm{d}t\in C_p(n,\alpha).$$

定理 4 设 $f\in\Sigma(p)$，则 $f\in C(n,p,A,B)$ 当且仅当

$$\frac{n+p}{z^{n+2p}}\int_0^z t^{n+2p-1}f(t)\mathrm{d}t\in C(n+1,p,A,B).$$

定理 5 设 $f\in C(n,p,A,B)$，则当 $|z|=r<1$ 有

$$p(1-Br)^{(B-A)/B}\leqslant|z^{p+1}(D^{n+p-1}f(z))'|\leqslant p(1+Br)^{(B-A)/B}(B\neq 0),$$

$$pe^{Ar}\leqslant|z^{p+1}(D^{n+p-1}f(z))'|\leqslant pe^{-Ar}(B=0),$$

$$|\arg\{-z^{p+1}(D^{n+p-1}f(z))'\}|\leqslant\begin{cases}\dfrac{B-A}{B}\arcsin(Br), & (B\neq 0)\\ -Ar, & (B=0),\end{cases}$$

$$\mathrm{Re}\{(-\frac{z^{p+1}(D^{n+p-1}f(z))'}{p})^{-B/(B-A)}\}\geqslant\frac{1}{1+|B|r}\ (B\neq 0).$$

这些估计是准确的，由

$$z^{p+1}(D^{n+p-1}f(z))'=\begin{cases}-p(1+Bz)^{(B-A)/B}, & (B\neq 0)\\ -pe^{-Az}, & (B=0)\end{cases}$$

确定的类 $C(n,p,A,B)$ 中函数 f 为极值函数.

3 类 $K(n,p,A,B)$

在本节中设 $-B\leqslant A<B\leqslant 1, m\geqslant p$,

$$s(n,p,m)=m\frac{(m+n+2p-1)!}{(n+p-1)!\ (m+p)!},$$

$$t(n,p,A,B,m)=s(n,p,m)\frac{(1+B)(m+p-1)+(1+A)}{p(B-A)}.$$

定理 6 设 $f(z)=z^{-p}+\sum_{m=p}^{\infty}(-1)^{m-p+1}|a_m|z^m\in T(p)$，则 f 在 $K(n,p,A,B)$ 中当且仅当 $\sum_{m=p}^{\infty}t(n,p,A,B,m)|a_m|\leqslant 1$.

从定理 6 立得

推论 2 设 $f(z)=z^{-p}+\sum_{m=p}^{\infty}(-1)^{m-p+1}|a_m|z^m\in K(n,p,A,B)$，则

$$|a_m|\leqslant\frac{1}{t(n,p,A,B,m)}(m\geqslant p).$$

式中等号仅被 $K(n,p,A,B)$ 中函数 $f(z)=z^{-p}+\dfrac{(-1)^{m-p+1}}{t(n,p,A,B,m)}z^m$ 达到.

推论 3 $K(n+1,p,A,B)\subset K(n,p,A,B)\subset K(1-p,p,A,B)$. 因此 $K(n,p,A,B)$ 中函数是亚纯 p 叶凸象的.

应用定理 6 可证以下结果：

定理 7 设 $f\in K(n,p,A,B)$，则当 $0<|z|=r<1$ 有

$$\frac{1}{r^p}-\frac{r^p}{t(n,p,A,B,p)}\leqslant|f(z)|\leqslant\frac{1}{r^p}+\frac{r^p}{t(n,p,A,B,p)},$$

$$\frac{p}{r^{p+1}}-\frac{pr^{p-1}}{t(n,p,A,B,p)}\leqslant|f'(z)|\leqslant\frac{p}{r^{p+1}}+\frac{pr^{p-1}}{t(n,p,A,B,p)}.$$

这些估计是准确的，式中等号被 $K(n,p,A,B)$ 中函数 $f_p(z)=z^{-p}-\dfrac{z^p}{t(n,p,A,B,p)}$ 在 $z=r$ 或 $z=re^{\pi i/(2p)}$ 达到.

定理 8 设 $f\in K(n,p,A,B), c>0, F(z)=\frac{c}{z^{c+p}}\int_0^z t^{n+p-1}f(t)\mathrm{d}t$，则

(i) $F\in K(n,p,A',B)$，这里

$$A'=\frac{B(c+2p)[(1+B)(2p-1)+(1+A)]-c(B-A)[(1+B)(2p-1)+1]}{(c+2p)[(1+B)(2p-1)+(1+A)]+c(B-A)}\in(A,B);$$

(ii) $F\in K(n,p,2\alpha-1,1)$，这里

$$\alpha=\frac{(c+2p)[(1+B)(2p-1)+(1+A)]-c(B-A)(2p-1)}{(c+2p)[(1+B)(2p-1)+(1+A)]+c(B-A)}\in(0,1).$$

结果是准确的，$K(n,p,A,B)$中函数 $f_p(z)=z^{-p}-\frac{z^p}{t(n,p,A,B,p)}$为极值函数.

参考文献：

[1] RUSCHEWEYH S. *New criteria for univalent functions* [J]. Proc. Amer. Math. Soc., 1975, **49**: 109—115.

[2] GOEL R M and SOHI N S. *A new criterion for p-valent functions* [J]. Proc. Amer. Math. Soc., 1980, **78**: 353—357.

[3] KUMAR V and SHUKLA S L. *Multivalent functions defined by Ruscheweyh derivatives* **I** [J]. Indian J. Pure. Appl. Math., 1984, **15**: 1228—1238.

[4] 杨定恭. α级星象函数的子类 [J]. 数学年刊 A 辑, 1987, **8**: 687—692.

[5] AHUJA O P and SILVERMAN H. *Function classes related to Ruscheweyh derivatives* [J]. J. Austral. Math. Soc., 1989, **47**(A): 438—444.

[6] CHEN M P and OWA S. *A property of certain analytic functions involving Ruscheweyh derivatives* [J]. Proc. Japan Acad., 1989, **65**(A): 333—335.

[7] AOUF M K and DARWISH H E. *A remark on certain p-valent functions* [J]. Internat. J. Math. Math. Sci., 1996, **19**: 403—406.

[8] MOGRA M L. *Meromorphic multivalent functions with positive coefficients* **I** [J]. Math. Japan., 1990, **35**: 1089—1098.

[9] CHO N E and KWON O S. *Meromorphic univalent functions with positive and fixed second coefficients* [J]. Math. Japan., 1992, **37**: 301—306.

[10] KIM Y C LEE S H and OWA S. *On certain meromorphic functions with positive coefficients* [J]. Internat. J. Math. Math. Sci., 1993, **16**: 409—412.

[11] YANG Ding-gong. *On new subclasses of meromorphic p-valent functions* [J]. J. Math. Res. Exposition, 1995, **15**: 7—13.

Subclasses of Meromorphically p-Valent Convex Functions

YANG Ding-gong

(Dept. of Math., Suzhou University, Jiangsu 215006)

Abstract: In this paper two new subclasses $C(n,p,A,B)$ and $K(n,p,A,B)$ of meromorphically p-valent convex functions in the unit disc are introduced and certain properties of these classes such as inclusion relations and integral transforms are studied.

Key words: meromorphic; p-valent; convex; subordination; integrals.