第20卷第2期 2000年5月

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION

Vol. 20 No. 2 May 2000

有限个任意小同胚连接区域的性质*

陈 尔 明

(齐齐哈尔师范学院数学系，黑龙江 161006)

摘 要：本文给出了一个条件，证明了在此条件下任意小同胚连接区域是道路连通的.

关键词：小同胚；Effros 度量；道路连通.

分类号：AMS(1991) 54F/CLC O189

文献标识码：A **文章编号**：1000-341X(2000)02-0220-03

任意小同胚及其有限复合是拓扑和动力系统中有价值的概念和方法. 对紧致度量空间中可用有限个任意小同胚相连接的区域，人们已阐明了不少特性. 本文探讨它的另一性质.

本文沿用文献[1]的符号、记法. 设 X 是具有度量 ρ 的紧致度量空间，G 是 X 的同胚群 $H(X)$ 的子群，O 是 G 的对称开集(即 $O=O^{-1}$)且单位元 $1\in O$. 定义 $G_0=\{k\in G$：存在 O 的有限子集 $\{k_1,\cdots,k_n\}$ 使得 $k=k_n\circ\cdots\circ k_1\}$. 在文献[1]，[2]中，引进、应用了 Effros 度量的概念. 任给 X 中两点 $x,y\in X$，令 $H(x,y)=\{h\in H(X):h(x)=y\}$. X 上的 Effros 度量 σ 由下式给出：

$$\sigma(x,y)=\begin{cases}\inf\{\hat{\rho}(h,1):h\in H(x,y)\},H(x,y)\neq\varnothing,\\ \operatorname{diam}(X,\rho),H(x,y)=\varnothing,\end{cases}$$

其中 $\hat{\rho}$ 为 $H(X)$ 上定义的上确界度量.

文献[1]中证明了下述命题：

定理 1 设 (X,ρ) 为非退化的紧致度量空间，C 是 (X,σ) 的连通分支，则 C 含于 (X,ρ) 在同胚群 $H(X)$ 作用下的某轨道的连通分支中. 若 C,D 是 (X,σ) 中不同的连通分支，则 $\sigma(C,D)>0$，从而，如果 (X,σ) 中两点位于同一连通分支中，则对 $\forall\ \varepsilon>0$，存在 (X,ρ) 的有限个自同胚，$h_1,\cdots,h_n$ 使 $h_n\circ\cdots\circ h_1(x)=y$ 且 $\hat{\rho}(h_i,1)<\varepsilon$.

这个定理对 $H(X)$ 及其任意完全子群都成立. 设 G 是 $H(X)$ 的完全子群，令 $C_x=\{y\in X$：对 G 的每个开集 O(且 $O=O^{-1},1\in O$)，$y\in G_0(x)\}$. 那么 C_x 是连通的. 本文证明在一定条件下，C_x 是道路连通的.

定理 2 设 (X,ρ) 为紧致度量空间，C_x 为如上面定义的无穷小同胚连接区域，若存在固定的自然数 n，使得对 $\forall\ x',x''\in C_x,\rho(x',x'')<M$，总有不超过 n 个同胚，$h_1,\cdots,h_n,h_i\in G_0$，使得

* 收稿日期：1997-01-17

基金项目：黑龙江省自然科学基金(A9619)及省教委科研基金项目

作者简介：陈尔明(1951-)，男，吉林省长春市人，硕士，副教授.

$x''=h_n\circ\cdots\circ h_1(x')$ 且 $\hat{\rho}(h_i,1)<\frac{M}{2}$,则 C_x 通道连通(自然要求 $n\geqslant 2$).

证明 对 $\forall\, x',x''\in C_x,\rho(x',x'')<M$,取 $h_1,\cdots,h_n\in G_0$,使得 $h_n\circ\cdots\circ h_1(x')=x'',\hat{\rho}(h_i,1)<\frac{M}{2}$. 当 h_i 的个数少于 n 时,可添上若干单位映射 1,凑成 n 个. 令 $x_0=x',x_i=h_i\circ\cdots\circ h_1(x')$. 对 x_i,x_{i+1} 又有同胚 $h_{i1},\cdots,h_{in}$,使 $h_{ik}\in G_0,x_{i+1}=h_{in}\circ\cdots\circ h_{i1}(x_i)$. 令 $x_{i0}=x_i,x_{ik}=h_{ik}\circ\cdots\circ h_{i1}(x_i),\hat{\rho}(h_{ik},1)<\frac{M}{2^2}$. 一般地对 $x_{i_1i_2\cdots i_m},x_{i_1i_2\cdots i_m+1},\rho(x_{i_1i_2\cdots i_m},x_{i_1i_2\cdots i_m+1})<\frac{M}{2^m}$,有同胚 $h_{i_1i_2\cdots i_m1},\cdots,h_{i_1i_2\cdots i_mn}$,使得

$$x_{i_1i_2\cdots i_m+1}=h_{i_1i_2\cdots i_mn}\circ\cdots\circ h_{i_1i_2\cdots i_m1}(x_{i_1i_2\cdots i_m}),$$

其中 $h_{i_1i_2\cdots i_mk}\in G_0,\hat{\rho}(h_{i_1i_2\cdots i_mk},1)<\frac{M}{2^{m+1}}$.

令 $x_{i_1i_2\cdots i_m0}=x_{i_1i_2\cdots i_m},x_{i_1i_2\cdots i_mk}=h_{i_1i_2\cdots i_mk}\circ\cdots\circ h_{i_1i_2\cdots i_m1}(x_{i_1i_2\cdots i_m})$.

考虑按上面方法形成的任意叙列:$S=\{x_{i_1},x_{i_1i_2},\cdots,x_{i_1i_2,\cdots,i_m},\cdots\}$,对任意 $l<m$,

$$\rho(x_{i_1i_2\cdots i_l},x_{i_1i_2\cdots i_m}\leqslant\frac{M}{2^l}\cdot n.$$

当 l 充分大时,这个距离可任意小. 所以 S 是一 Cauchy 列. (X,ρ) 是紧致空间,S 收敛于某一点,记为 $x_{i_1i_2\cdots i_m\cdots}$. 这样,可以建立一映射 $f:[0,1]\to X$. 使[0,1]中的每一点对应 X 中相应的元. [0,1]中的任一数可表示为一 n 进制的小数,令 $f(0,i_1i_2\cdots i_m)=x_{i_1i_2\cdots i_m},f(0,i_1i_2\cdots i_m\cdots)=x_{i_1i_2\cdots i_m\cdots}$. 还可证明 f 是连续的. 对 $x_{i_1\cdots i_m}$,不妨设 $i_m\neq 0$,它的 ϵ 开领域 $U=U(x_{i_1\cdots i_m},\epsilon)$,取 k 使得$\frac{M}{2^k}\cdot n<\epsilon$,那么对区间

$$\Delta=(\underbrace{0,i_1,\cdots,i_m-1,n-1,\cdots,n-1}_{k+1\text{位}};\underbrace{0,i_1,\cdots,i_m,0,\cdots,0,1}_{k+1\text{位}}),$$

Δ 中任意点在 f 下的象与 $x_{i_1\cdots i_m}$ 的距离不大于$\frac{M}{2^k}\cdot n$,所以 $f(\Delta)\subset U$.

对 $x_{i_1i_2\cdots i_m\cdots}$,若相应的小数 $0,i_1\cdots i_m\cdots$ 从某一位之后全为 0 或 $n-1$,它等于形如 $0,i_1\cdots i_m$ 的数,上面已讨论,所以不妨设不会从某一位之后全为 0 或 $n-1$. 对于邻域 $U=U(x_{i_1i_2\cdots i_m\cdots},\epsilon)$,取 k 使得$\frac{M}{2^k}\cdot n<\epsilon$,再取 $k'>k$ 使 $i_{k'}$ 不等于 0 或 $n-1$. 那么对于 $0,i_1\cdots i_m\cdots$ 的领域 $\Delta=(0,i_1,\cdots,i_{k'}-1,0,i_1,\cdots,i_{k'}+1)$ 中的任意数在 f 下的象与 $x_{i_1i_2\cdots i_m\cdots}$ 的距离不超过$\frac{M}{2^k}\cdot n$,所以 $f(\Delta)\subset U$,这就证明了 f 在(0,1)中的各点的连续性. 也易证,f 在[0,1]的端点处也连续. 这说明 f 是一道路. 在(X,σ)中,C_x 是闭集. 今叙列 $S\subset C_x$,上面所述 S 的极限点也是距离 σ 下的极限点,必属于 C_x,由 S 的任意性可知 $f([0,1])\subset C_x$,从而可知 C_x 是道路连通的. □

注意到 C_x 的道路连通性与(X,ρ)的道路连通性无关. 例如,对于熟知的空间

$$X=A\cup G,A=\{(0,y):-1\leqslant y\leqslant 1\},G=\{(x,\sin\frac{1}{x});0<x\leqslant\frac{1}{2\pi}\},$$

作为 R^2 的子空间,X 非通路连通. 但容易证明,对 $\forall\, x\in X,C_x$ 是道路连通的.

参考文献:

[1] ZHOU You-cheng. *On a domain in which any two points are joined by finite numbers of arbitrarily*

small homeomorphisms [J]. Bull. London. Math. Soc., 1997, **29**: 89—92.
[2] CHARATONIC J J. MACKOWIAK T. *Around Effros' theorem* [J]. Trans. Amer. Math. Soc., 1986, **298**: 579—602.
[3] KENNEDY J. *Some facts about homogeneity properties* [J]. Colloq. Math., 1990, **59**: 103—116.

A Character of the Domain with Being Joined by Finite Arbitrarily Small Homeomorphisms

CHEN Er-ming
(Dept. of Math., Qiqihar University, Heilongjiang 161006)

Abstract: This paper provides a condition and proves the domain in which any two points are joined by finite numbers of arbitrarily small homeomorphisms is path-connected under the condition.

Key words: arbitrarily small homeomorphism; effros metric; path-connected.