第 20 卷第 2 期 数学研究与评论 Vol. 20 No. 2
2000 年 5 月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION May 2000

关于 msss-映射*

李克典[1]， 冯秀峰[2]， 刘正帅[2]

(1. 商丘师范高等专科学校数学系，河南 476000； 2. 河南师范大学数学系，新乡 453002)

摘　要：本文证明了如下结果：(1) T_3 空间 X 具有 σ-局部可数 cs^*-网当且仅当 X 是某一度量空间的序列复盖 msss-映象；(2) T_3 空间 X 具有 σ-局部可数 cs-网当且仅当 X 是某一度量空间的强序列复盖 msss-映象.

关键词：σ-局部可数族；cs^*-网络；cs-网络；序列复盖映射；强序列复盖映射；msss-映射.

分类号：AMS(1991) 54E99/CLC O189.1

文献标识码：A　　**文章编号**：1000-341X(2000)02-0223-04

为了用映射揭示度量空间与 σ-局部可数集族或 σ-局部有限集族所定义的空间之间的规律，[1]中定义了分层强 s-映射与分层强紧映射，建立了具有 σ-局部可数网的空间、具有 σ-局部可数 k-网的空间与特定的度量空间的联系. 拓广了 Arhangel'skii，Michael 等人关于可数集族与局部可数集族方面的一系列工作，显示了这两类映射在处理 σ-局部可数集族、σ-局部有限集族的作用.

本文所述空间均满足正则且 T_2 分离公理，映射均是连续的满函数，N 表示自然数的集合. 对于空间 X 的子集族 $\mathbf{P}$ 及映射 $f:X\to Y$，记 $f(\mathbf{P})=\{f(P):P\in\mathbf{P}\}$. 对于积空间 $\prod_{i\in N}X_i$，p_i 表示从 $\prod_{i\in N}X_i$ 到 X_i 的投影. 文中未定义的术语、符号均以[5]为准.

定义 1　设映射 $f:X\to Y$.

(1)　f 称为分层强 s-映射(stratified strong s-mapping)[1]，如果存在以 X 为子空间的积空间 $\prod_{i\in N}X_i$ 满足：对任意的 $y\in Y$，存在 y 在 Y 的开邻域$\{V_i\}$，使得每一 $p_if^{-1}(V_i)$ 是 X_i 的可分子空间. 若设所有的 X_i 是度量空间，则称 f 为可度量分层强 s-映射，简记为 msss-映射.

(2)　f 称为序列复盖映射[2]，如果对 Y 的每个收敛序列(包含它的极限)都是 X 的某一紧子集在 f 下的象.

(3)　f 称为强序列复盖映射[3]，如果 Y 的每一收敛序列(包含它的极限)都是 X 的某一收敛序列在 f 下的象.

(4)　f 称为(强)序列复盖 msss-映射. 如果 f 既是(强)序列复盖映射，又是 msss-映射.

定义 2[5]　设 X 是一个拓扑空间，$\mathbf{P}$ 是 X 的复盖.

* 收稿日期：1997-04-22
基金项目：河南省自然科学基金(984062200)和河南省教委科研基金(97110012)资助项目
作者简介：李克典(1956-)，男，河南省拓城县人，河南商丘师专副教授.

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

(1) $\mathbf{P}$ 称为 X 的网络，如果对 X 的每一开集 U 及任意 $x\in U$，$\exists\ P\in\mathbf{P}$，使得 $x\in P\subset U$.

(2) $\mathbf{P}$ 称为 X 的 cs-网络，如果 $\{x_n\}$ 是 X 中的收敛于点 x 的序列且 U 是 x 在 X 中的邻域，则存在 $m\in N$ 和 $P\in\mathbf{P}$，使得 $\{x\}\cup\{x_n:n\geqslant m\}\subset P\subset U$.

(3) $\mathbf{P}$ 称为 cs^*-网络，如果 $\{x_n\}$ 是 X 中收敛于点 x 的序列且 U 是 x 中的邻域，$\{x_n\}$ 的子列 $\{x_{n_i}\}$ 及 $P\in\mathbf{P}$，使得 $\{x\}\cup\{x_{n_i}:i\in N\}\subset P\subset U$.

定理 1 拓扑空间 X 具有 σ-局部可数 cs^*-网当且仅当 X 是某一度量空间的序列复盖 msss-映象.

证明 *充分性* 设 f 是度量空间 M 到 X 的 msss-映射. 因为 M 是度量空间，所以 M 有 σ-局部有限基 $\mathbf{B}$. 由[1]中定理 1.3 知，X 有 σ-局部可数网 $f(\mathbf{B})=\{f(B):B\in\mathbf{B}\}$. 下证 $f(\mathbf{B})$ 是 cs^*-网. 设 $\{x_n\}$ 是 X 中收敛于 x 的序列，令 $K=\{x\}\cup\{x_n:n\in N\}$ 且 U 是 x 的开邻域. 由于 f 是序列复盖映射，所以存在 M 的紧子集 L，使得 $f(L)=K$. 对于每个 $n\in N$，取 $z_n\in L\cap f^{-1}(x_n)$. 因为 L 是 M 的紧度量子空间，所以，序列 $\{z_n\}$ 在 L 中必有一个收敛的子列 $\{z\}\cup\{z_{n_i}\}$. 于是 $f(z)=x$，$\{z\}\cup\{z_{n_i}:i\in N\}\subset f^{-1}(U)$. 因而，存在 $i_0\in N$ 对于某个 $B\in\mathbf{B}$，使得 $\{z\}\cup\{z_{n_i}:i\geqslant i_0\}\subset B\subset f^{-1}(U)$. 令 $P=f(B)$，则 $P\in f(\mathbf{B})$，有 $\{x\}\cup\{x_{n_i}:i\geqslant i_0\}\subset P\subset U$. 故 $f(\mathbf{B})$ 是 X 的 σ-局部可数 cs^*-网.

必要性 假设 Ψ 是 X 的 σ-局部可数 cs^*-网络，$\Psi=\bigcup\{\Psi_i:i\in N\}$，其中 $\Psi_i=\{P_\alpha:\alpha\in A_i\}$ 是 X 的关于有限交封闭的局部可数闭子集族且对于每个 $i\in N$，$X\in\Psi_i\subset\Psi_{i+1}$，令

$$A=\{\beta=(\alpha_i)\in\prod_{i\in N}A_i:\{P_{\alpha_i}\}\text{是 }X\text{ 中某点 }x(\beta)\text{的网且 }P_{\alpha_{i+1}}\subset P_{\alpha_i}\},$$

赋予 A 离散空间族 $\{A_i\}$ 的积拓扑所诱导的子空间拓扑，则 A 是可度量化的空间. 由 $f(\beta)=x(\beta)$ 定义了从 A 到 X 上的映射 f，则 f 是序列复盖 msss-映射.

1. f 是 msss-映射. 对任意 $x\in X$，$i\in N$，存在 x 在 X 中的开邻域 V_i，使得 $|\{\alpha_i\in A_i:P_\alpha\cap V_i\neq\varnothing\}|\leqslant\aleph_0$. 令 $B_i=\{\alpha\in A_i:P_\alpha\cap V_i\neq\varnothing\}$，则 $p_if^{-1}(V_i)\subset B_i$，所以 $p_if^{-1}(V)$ 是 A_i 的可分子空间，故 f 是 msss-映射.

2. f 是序列复盖映射. 对于 X 中收敛于 x 序列 $\{x_n\}$，假设 $j\neq i$，$x_i\neq x_j$ 且对于每个 $n\in N$，$x_n\neq x$. 令 $K=\{x\}\cup\{x_n:n\in N\}$，$U$ 是 K 的开邻域，称 Ψ_i 的子集 $\mathbf{F}$ 具有性质 $\mathbf{F}(K,U)$：如果 $\mathbf{F}$ 满足 (1)$\mathbf{F}$ 是有限的；(2)$K\subset\bigcup\mathbf{F}\subset U$；(3)每个 $P\in\mathbf{F}$，$P\cap K\neq\varnothing$ 且如果 P 包含 $\{x_n\}$ 的子序列，则 $x\in P$.

令 $\Psi_i(K)=\{\mathbf{F}\subset\Psi_i:\mathbf{F}\text{ 有性质 }\mathbf{F}(K,U)\}$，因为 Ψ_i 是局部可数的且 K 是可数集，则 $\Psi_i(K)$ 是可数的，即 $|\Psi_i(K)|\leqslant\aleph_0$. 记 $\Psi_i(K)=\{\Psi_{ij}:j\in N\}$. 对于 $n\in N$，令 $\Psi_n'=\bigwedge_{i,j\leqslant n}\Psi_{ij}$，则 $\Psi_n'\subset\Psi_n$ 且 Ψ_n' 具有性质 $F(K,U)$. 因为 Ψ_n 关于有限交封闭，所以存在 A_n 的有限子集 B_n，使得 $\Psi_n'=\{P_\alpha:\alpha\in B_n\}$. 令 $L=\{\beta=(\alpha_i)\in\prod_{i\in N}B_i:P_{\alpha_{i+1}}\subset P_{\alpha_i}\}$.

(1)L 是 $\prod_{i\in N}A_i$ 的紧子集. 设 $\gamma=(\alpha_i)\in\prod_{i\in N}B_i\setminus L$，存在 $i_0\in N$，使得 $P_{\alpha_{i_0+1}}\not\subset P_{\alpha_{i_0}}$，令 $V=\{\beta\in\prod_{i\in N}B_i:p_{i_0}(\beta)=\alpha_i$，且 $p_{i_0+1}(\beta)=\alpha_{i_0+1}\}$，则 V 是 γ 在 $\prod_{i\in N}B_i$ 中的开邻域且 $V\cap L=\varnothing$. 因而 L 是紧子集 $\prod_{i\in N}B_i$ 的闭子集，所以 L 是 $\prod_{i\in N}A_i$ 的紧子集.

(2) $L\subset A$ 且 $f(L)\subset K$. 设 $\beta=(\alpha_i)\in L$，由性质 $F(K,X)$ 及 L 的定义知，$\{K\cap P_{\alpha_i}:i\in N\}$ 是 X 的紧子集 K 的非空递减闭子集序列，因而 $K\cap(\bigcap_{i\in N}P_{\alpha_i})\neq\varnothing$. 取 $y\in K\cap$

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

$(\bigcap_{i\in N} P_{\alpha_i})$,则$\{P_{\alpha_i}:i\in N\}$形成点$y$在$X$中的网络.事实上,设$V$是$y$在$X$中的邻域,如果$y=x$,则$\{y\}\cup\{x_n:n\geqslant m\}\subset V$,对于某个$m\in N$.令$K_1=\{y\}\cup\{x_n:n\geqslant m\}$,$K_2=K\backslash K_1$,则对于$K_1,V$及每个$i\in N$,存在$\Psi_i$的子集族$\mathbf{F}'$有性质$\mathbf{F}(K,V)$.因为$K_2$是有限集且$K_2\subset X\backslash\{y\}$,存在$\Psi_i$的有限子族$\mathbf{F}''$有$K_2\subset\bigcup\mathbf{F}''\subset X\backslash\{y\}$且每个$P\in\mathbf{F}''$,$P\cap K_2\neq\varnothing$.令$\mathbf{F}=\mathbf{F}'\cup\mathbf{F}''$,则$\mathbf{F}$有性质$\mathbf{F}(K,X)$,所以$\mathbf{F}=\Psi_{ij}$对某个$j\in N$.于是存在$n\in N$,$\Psi'_n$具有性质$\mathbf{F}(K,X)$.因为$y\in P_{\alpha_n}\in\Psi'_n$,对于$i,j\in N$,存在$P_{ij}\in\Psi_{ij}$使得$P_{\alpha_n}=\bigcap_{i,j\leqslant n}P_{ij}$,所以,有$y\in P_{\alpha_n}\subset\bigcup\mathbf{F}'\subset V$,因此$\{P_{\alpha_i}:i\in N\}$形成点$y$的网络.

如果$y\neq x$,则对任意$i\in N$,存在某个$P\in\Psi_i$,有$y\in P\subset V\backslash(K\backslash\{y\})$.于是,存在$\Psi_i$的有限集族$\mathbf{F}'$具有性质$\mathbf{F}(K\backslash\{y\},X\backslash\{y\})$.令$\mathbf{F}=\mathbf{F}'\cup\{P\}$,则$\mathbf{F}$有性质$\mathbf{F}(K,X)$.对于某个$j\in N$,$\mathbf{F}=\Psi_{ij}$.因此,存在$n\in N$,使得$\Psi'_n$具有性质$F(K,X)$.对于$i,j\in N$,存在$P_{ij}\in\Psi_{ij}$,使得$P_{\alpha_n}=\bigcap_{i,j\leqslant n}P_{ij}$,有$y\in P_{\alpha_i}\subset P\subset U$,所以$\{P_{\alpha_i}:i\in N\}$形成$y$在$X$中的网络,即$\beta=(\alpha_i)\in A$且$f(B)=y\in K$,故$L\subset A$且$f(L)\subset K$.

(3) $K\subset f(L)$. 设$y\in K$及$i,j\in N$,存在$P_{ij}\in\Psi_{ij}$,使得$y\in P_{ij}$.取$\alpha_n\in B_n$,使$P_{\alpha_n}=\bigcap_{i,j\leqslant n}P_{ij}$.令$\beta=(\alpha_n)$,由于$y\in K\cap(\bigcap_{i\in N}P_{\alpha_i})$知,$\{P_{\alpha_i}:i\in N\}$是$y$在$X$中的网络,从而$\beta\in L$且$f(\beta)=y$,于是$K\subset f(L)$.

总之,$f(L)=K$.f是从度量空间A到X上的序列复盖msss-映射. □

推论[1] 空间X具有局部可数cs^*-网络当且仅当X是某一度量空间的序列复盖ss-映象.

定理2 拓扑空间X具有σ-局部可数cs-网络当且仅当X是某一度量空间的强序列复盖msss-映象.

证明 *充分性* 设f是度量空间M到X的强序列复盖msss-映射,所以M有σ-局部有限基$\mathbf{B}$,由[1]定理1.3知,X具有σ-局部可数网$f(\mathbf{B})$,下证$f(\mathbf{B})$是X的cs-网.

设$\{x_n\}$是X中收敛于x的序列,令$K=\{x\}\cup\{x_n:n\in N\}$,$U$是$x$的开邻域.由于$f$是强序列复盖映射,则存在$M$的收敛序列$L$,使得$f(L)=K$.于是,$L\subset f^{-1}f(L)=f^{-1}(K)\subset f^{-1}(U)$,即$f^{-1}(U)$是$M$中的收敛序列$L=\{t_n:n\in N\}\cup\{t\}$的开邻域.于是,存在$m\in N$,使$\{t\}\cup\{t_n:n\geqslant m\}\subset B\subset f^{-1}(U)$对于某个$B\in\mathbf{B}$.因而$\{x\}\cup\{x_n:n\geqslant m\}=\{f(t)\}\cup\{f(t_n):n\geqslant m\}=f(\{t\}\cup\{t_n:n\geqslant m\})\subset f(B)\subset ff^{-1}(U)=U$.故$f(\mathbf{B})$是$X$的$\sigma$-局部可数$cs$-网络.

必要性 设$P=\bigcup\{P_i:i\in N\}$是空间X的cs-网,其中每一$P_i=\{P_\alpha:\alpha\in A_i\}$是$X$的关于有限交封闭的局部可数闭子集族且对每个$i\in N$,$X\in P_i\subset P_{i+1}$.令

$$A=\{\beta=(\alpha_i)\in\prod_{i\in N}A_i:\{P_{\alpha_i}\}\text{ 是 }X\text{ 中某点 }x(\beta)\text{ 的网络且 }P_{\alpha_{i+1}}\subset P_{\alpha_i}\}$$

赋予A离散空间族$\{A_i\}$的积拓扑所诱导的子空间拓扑,则A是可度量化的空间.由$f(\beta)=x(\beta)$定义了从A到X上的映射f,则f是强序列复盖msss-映射.

事实上,(1) f是msss-映射.对于每个$x\in X$,$i\in N$,存在x在X中的开邻域V_i,使得$|\{\alpha\in A_i:P_\alpha\cap V_i\neq\varnothing\}|\leqslant\aleph_0$,令$B_i=\{\alpha\in A_i:P_\alpha\cap V_i\neq\varnothing\}$,则$p_if^{-1}(V_i)\subset B_i$,所以$p_if^{-1}(V_i)$是$A_i$的可分子空间,故$f$是msss-映射.

(2) f是强序列复盖映射.对于X中收敛于点x的序列$\{x_n\}$,不妨设所有x_n都是互不相同的.让$K=\{x\}\cup\{x_n:n\in N\}$,并设$U$是$X$中任一包含$K$的开子集,称$\mathbf{P}_i$的子集$\mathbf{F}$具有性质

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

$\mathbf{F}(K,U)$，如果 $\mathbf{F}$ 满足(i)$\mathbf{F}$ 是有限的；(ii) 对每个 $P \in \mathbf{F}$，有 $\varnothing \neq P \cap K \subset P \subset U$ 且 $K \subset \bigcup \mathbf{F}$；(iii) 每个 $z \in K$，存在唯一 $P_z \in \mathbf{F}$，使得 $z \in P_z$；(iv) 若 $x \in P \in \mathbf{F}$，则 $K \backslash P$ 是有限的.

令 $\mathbf{P}_i(K) = \{\mathbf{F} \subset \mathbf{P}_i : \mathbf{F}$ 具有性质 $\mathbf{F}(K,X)\}$，因为 $\mathbf{P}_i$ 是局部可数的且 K 是 X 的紧可数子集，所以 $\mathbf{P}_i(K)$ 是可数的，记 $\mathbf{P}_i(K) = \{\mathbf{P}_{ij} : j \in N\}$. 对 $n \in N$，令 $\mathbf{P}'_n = \bigwedge_{i,j \leqslant n} \mathbf{P}_{ij}$，则 $\mathbf{P}'_n \subset \mathbf{P}_n$，且 $\mathbf{P}'_n$ 具有性质 $F(K,X)$. 对每一 $i \in N, m \in \omega$ 及 $x_m \in K$，存在 $\alpha_{im} \in A_i$，使得 $x_m \in \mathbf{P}_{\alpha_{im}} \in \mathbf{P}'_i$. 令 $\beta = (\alpha_{im}) \in \prod_{i \in N} A_i$. 仿照定理1的必要性证明，易知$\{\mathbf{P}_{\alpha_{im}} : i \in N\}$是点 x_m 在 X 中的网络. 因而，对每一 $m \in \omega$(其中 $\omega = \{0\} \cup N$)，有 $\beta_m \in M$ 且 $f(\beta_m) = x_m (x_0 = x)$. 对每个 $i \in N$，存在 $n(i) \in N$，使得当 $n \geqslant n(i)$ 时，有 $\alpha_{in} = \alpha_{i0}$. 因此，$A_i$ 中的序列$\{\alpha_{im}\}$ 收敛于 α_{i0}. 于是，M 中的序列$\{\beta_n\}$ 收敛于 β_0. 这表明 f 是强序列复盖映射. □

推论[2] 拓扑空间 X 具有局部可数 cs-网络当且仅当 X 是某一度量空间的强序列复盖 ss-映象.

作者对林寿教授的帮助表示衷心的感谢.

参考文献:

[1] 林 寿. 局部可数集族,局部有限集族与 Alexandroff 问题 [J]. 数学学报, 1994, **37**(4): 491—496.

[2] LIN Shou. *The sequence-covering s-images of metric space* [J]. Northeastern Math. J., 1993, **9**(1): 81—85.

[3] 林 寿. Michael-Nagami 问题的注记 [J]. 数学年刊 A 辑, 1996, **17**(1): 9—12.

[4] 刘川,戴牧民. 度量空间的紧复盖 s-象 [J]. 数学学报, 1996, **39**(1): 41—44.

[5] 林 寿. 广义度量空间与映射 [M]. 北京:科学出版社, 1995.

On msss-Mapping

LI Ke-dian[1], FENG Xiu-feng[2], LIU Zheng-shuai[2]

(1. Dept. of Math., Shangqiu Teachers' College, Henan 476000;

2. Dept. of Math., Henan Normal University, Xinxiang 453002)

Abstract: In this paper we prove the following results: (1) A T_3 topological space X is the sequence-covering msss-image of a metric space if and only if it has a σ-locally countable cs*-network; (2) A T_3 topological space X is the strong sequence-covering msss-image of a matric space if and only if it has a σ-locally countable cs-network.

Key words: σ-locally countable collection; cs*-network; cs-network; sequence-covering mapping; strong sequence-covering mapping; msss-mapping.

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.