

# 关于一个反应扩散方程的两个结果\*

康东升

(驻马店师专数学系, 河南 465000)

摘要: 本文讨论了一个反应扩散方程的行波解以及一个平面三次系统的全局相图.

关键词: 反应扩散方程; 行波解; 平面多项式系统; 全局相图.

分类号: AMS(1991) 34C23/CLC O175.29

文献标识码: A 文章编号: 1000-341X(2000)02-0227-06

## 1 引言

考虑 Nagumo 方程的一种形式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u(1-u)(u-a), 0 < a < 1, \quad (1)$$

它多次出现在生化反应的文献中. Huxley 找到了(1)的一个显式行波解<sup>[1]</sup>  $U(x) = 1/(1 + e^{-\sqrt{2}/2x})$ , 其中  $z = x + \sqrt{2}(\frac{1}{2} - a)t, c = \sqrt{2}(\frac{1}{2} - a), 0 < a < 1/2$ . 它满足边界条件  $U(-\infty) = 0, U(+\infty) = 1$ , 这个解被人们称为 Huxley 波. 对(3)的行波解  $U(z) = U(x + ct)$ , 令  $\xi = U, \eta = U'$ , 则有

$$\begin{cases} \dot{\xi} = \eta, \\ \dot{\eta} = a\xi + c\eta - (1+a)\xi^2 + \xi^3. \end{cases} \quad (2)$$

这是一个平面三次多项式系统. 利用(1)的行波解的有关信息来对(2)作相平面全局分析, 这是一个很有趣的问题. 文献[2]给出了  $0 < a \leq 1/2, c \geq 0$  时的部分相图. 本文首先利用待定系数法得到方程(1)的一些显式行波解, 其中包括 Huxley 波; 然后利用(1)的行波解的所有信息对系统(2)作全面的相平面分析.

## 2 波速估计

考虑方程(1)的波前解  $U(x) = U(x + ct)$ . 利用文献[1]中的结果不难得到如下引理.

引理 1 若  $0 < a < 1/2$ , 则

(a) (1)存在唯一的满足边界条件  $U(-\infty) = 0, U(+\infty) = 1$  的波前解, 即 Huxley 波; 显式表示为  $U(x) = 1/(1 + e^{-(\sqrt{2}/2)x})$ ;

\* 收稿日期: 1997-04-20

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(19241009)

作者简介: 康东升(1967-), 男, 硕士, 河南确山县人, 驻马店师专副教授.

(b) (1) 的满足边界条件  $U(-\infty) = a, U(+\infty) = 1$  的波前解  $U(z)$  存在的充要条件是  $c \geq c^*$ , 这里  $c^*$  满足估计:  $\max\{2\sqrt{a(1-a)}, \sqrt{2}(1/2-a)\} \leq c^* \leq 1$ ;

(c) (1) 的满足边界条件  $U(-\infty) = a, U(+\infty) = 0$  的波前解  $U(z)$  存在的充要条件是  $c \geq 2\sqrt{a(1-a)}$ .

引理 2 若  $1/2 < a < 1$ , 则

(a) (1) 存在唯一的满足边界条件  $U(-\infty) = 1, U(+\infty) = 0$  的波前解  $U(z)$ , 波速  $c = \sqrt{2}(a - 1/2)$ , 显式表示为  $U(z) = 1/(1 + e^{(\sqrt{2}/2)z})$ ;

(b) (1) 的满足边界条件  $U(-\infty) = a, U(+\infty) = 1$  的波前解  $U(z)$  存在的充要条件是  $c \geq 2\sqrt{a(1-a)}$ ;

(c) (1) 的满足边界条件  $U(-\infty) = a, U(+\infty) = 0$  的波前解  $U(z)$  存在的充要条件是  $c \geq c^{**}$ , 这里对  $c^{**}$  有估计:  $\max\{2\sqrt{a(1-a)}, \sqrt{2}(a - 1/2)\} \leq c^{**} \leq 1$ .

引理 3 若  $a = 1/2$ , 则

(a) 当且仅当  $c \geq 1$  时, (3) 存在满足  $U(-\infty) = 1/2, U(+\infty) = 1$  的波前解  $U(z)$ .

(b) 当且仅当  $c \geq 1$  时, (3) 存在满足  $U(-\infty) = 1/2, U(+\infty) = 0$  的波前解  $U(z)$ .

三个引理的证明略去.

### 3 显式波前解

讨论(1)的显式波前解  $U(z)$ , 其中  $c \geq 0, 0 < a < 1$ . 主要结果可归纳为如下三个定理:

定理 1 (a) 若  $0 < a < 1/2, c = \sqrt{2}(1/2 - a)$ , 则(1)有显式波前解  $U(z) = 1/(1 + e^{-(\sqrt{2}/2)z})$ , 它满足  $U(-\infty) = 0, U(+\infty) = 1$ ;

(b) 若  $1/2 < a < 1, c = \sqrt{2}(a - 1/2)$ , 则(1)有显式波前解  $U(z) = 1/(1 + e^{(\sqrt{2}/2)z})$ , 它满足  $U(-\infty) = 1, U(+\infty) = 0$ .

定理 2 (a) 若  $a = 1/2, c = 0$ , 则(1)有显式解  $U_1(z) = U_1(x) = 1/(1 + e^{-(\sqrt{2}/2)z})$ , 它满足  $U_1(-\infty) = 0, U_1(+\infty) = 1$ ;

(b) 若  $a = 1/2, c = 0$ , 则(1)有显式解  $U_2(z) = U_2(x) = 1/(1 + e^{(\sqrt{2}/2)z})$ , 它满足  $U_2(-\infty) = 1, U_2(+\infty) = 0$ .

定理 3 (a) 若  $0 < a < 1, c = \sqrt{2}(1+a)/2$ , 则(1)有显式波前解  $U(z) = a + (1-a)/(1 + e^{-\sqrt{2}(1-a)/2z})$ , 它满足  $U(-\infty) = a, U(+\infty) = 1$ ;

(b) 若  $0 < a < 1, c = \frac{\sqrt{2}}{2}(2-a)$ , 则(1)有显式波前解  $U(z) = a/(1 + e^{\sqrt{2}(a/2)z})$ , 它满足  $U(-\infty) = a, U(+\infty) = 0$ .

下面统一给出三个定理的证明过程.

令  $y = U(z) = U(x+ct)$ , 代入(1)可得  $\ddot{y} - c\dot{y} - ay + (1+a)y^2 - y^3 = 0$ .

令  $\dot{y} = p$ , 则  $\ddot{y} = p \frac{dp}{dy}$ , 代入上式有

$$p \frac{dp}{dy} - cp - ay + (1+a)y^2 - y^3 = 0. \quad (3)$$

考虑(3)的多项式形式的解  $p = A_1 + A_2y + A_3y^2$ , 将其代入(3)式, 有

$(A_1A_2 - cA_1) + (2A_1A_3 + A_2^2 - cA_2)y + (3A_2A_3 - cA_3)y^2 + 2A_3^2y^3 = ay - (1+a)y^2 + y^3$ ,  
比较同次项系数,有

$$\begin{cases} A_1(A_2 - c) = 0, & (4) \\ 2A_1A_3 + A_2^2 - cA_2 = a, & (5) \\ 3A_2A_3 - cA_3 = -(1+a), & (6) \\ 2A_3^2 = 1. & (7) \end{cases}$$

由(7)式可得  $A_3 = \pm \sqrt{2}/2$ , 代入(6)式又可得  $A_2 = (c \mp (1+a)\sqrt{2})/3$ . 由(4)式可得  $A_1 = 0$  或  $A_2 = c$ .

(i) 考虑  $A_1 \neq 0, A_2 = c$  的情形, 则有  $c = (c \mp (1+a)\sqrt{2})/3$ , 即  $c = \mp \sqrt{2}(1+a)/2$ . 但  $c \geq 0$ , 故只考虑  $c = \sqrt{2}(1+a)/2$ , 此时  $A_3 = -\sqrt{2}/2, A_2 = (c + (1+a)\sqrt{2})/3$ , 再由(5)式可得  $A_1 = -\sqrt{2}a/2$ . 这样就有  $\frac{dy}{dz} = -\frac{\sqrt{2}}{2}(y-1)(y-a)$ , 从而  $y = a + (1-a)/(1 + e^{(-\sqrt{2}(1-a)/2)z})$ , 这就是定理 3(a) 的情形.

(ii)  $A_1 = 0$  时的情形, 从(5)式可得到  $A_2^2 - cA_2 - a = 0, A_2 = (c \pm \sqrt{c^2 + 4a})/2 = (c \pm \sqrt{2}(1+a))/3$ . 这里有四种情况, 我们考虑其中两种.

1).  $(c + \sqrt{c^2 + 4a})/2 = (c + \sqrt{2}(1+a))/3$ . 当  $0 < a \leq 1/2$  时, 我们可得到  $c = \sqrt{2}(1/2 - a)$ , 此时有  $A_1 = 0, A_2 = \sqrt{2}/2, A_3 = -\sqrt{2}/2$ . 故有  $\frac{dy}{dz} = \frac{\sqrt{2}}{2}y(1-y)$ , 从而  $y = 1/(1 + e^{-(\sqrt{2}/2)z})$ . 此即为定理 1(a) ( $0 < a < 1/2$ ) 和定理 2(a) ( $a = 1/2, c = 0$ ) 的情形.

2).  $(c - \sqrt{c^2 + 4a})/2 = (c - \sqrt{2}(1+a))/3$ . 由此可解得  $c = \sqrt{2}(1-a/2)$ , 此时有  $A_1 = 0, A_2 = -\sqrt{2}a/2, A_3 = \sqrt{2}/2$ , 故有  $\frac{dy}{dz} = \frac{\sqrt{2}}{2}y(y-a), y = a/(1 + e^{(\sqrt{2}a/2)z})$ . 这即为定理 3(b) 的情形. 为证明定理 1(b) 和定理 2(b), 令  $v = 1 - u$ , 则(1)变为

$$v_t = v_{xx} + v(1-v)(v - (1-a)), \quad (8)$$

当  $1/2 < a < 1$  时,  $0 < 1-a < 1/2$ , 故定理 1(a) 和定理 2(a) 可用方程(8), 于是不难推出定理 1(b) 和定理 2(b).

这样就完成了定理证明.

#### 4 相平面分析

考虑平面三次多项式系统(2). 它有三个有限奇点  $(0,0), (a,0), (1,0)$ . 容易证明  $(0,0)$  和  $(1,0)$  是鞍点,  $(a,0)$  当  $0 < c < 2\sqrt{a(1-a)}$  时为不稳定焦点,  $c \geq 2\sqrt{a(1-a)}$  时为不稳定结点. 这里只证明当  $c=0$  时,  $(a,0)$  为中心.

引理 4 当  $c=0$  时,  $(a,0)$  为系统(2)的中心.

证明  $c=0$  时, (2) 变为

$$\begin{cases} \dot{\xi} = \eta, \\ \dot{\eta} = a\xi - (1+a)\xi^2 + \xi^3. \end{cases} \quad (9)$$

令  $\xi = \xi_1 + a, \eta = \eta_1$ , 则(9)式变为

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = \eta_1, \\ \dot{\eta}_1 = (a^2 - a)\xi_1 + (2a - 1)\xi_1^2 + \xi_1^3. \end{cases} \quad (10)$$

再令  $\xi_1 = \xi_2, \eta_1 = -\sqrt{a-a^2}\eta_2, t = \tau/\sqrt{a-a^2}$ , 则(10)式变为

$$\begin{cases} \frac{d\xi_2}{d\tau} = -\eta_2, \\ \frac{d\eta_2}{d\tau} = \xi_2 + \frac{2a-1}{a^2-a}\xi_2^2 + \frac{1}{a^2-a}\xi_2^3. \end{cases} \quad (11)$$

为简便起见, 在(11)中仍以  $\xi, \eta, t$  表示有关变量, 即有

$$\begin{cases} \dot{\xi} = -\eta, \\ \dot{\eta} = \xi + \frac{2a-1}{a^2-a}\xi^2 + \frac{1}{a^2-a}\xi^3. \end{cases} \quad (12)$$

作变换  $\xi = r\cos\theta, \eta = r\sin\theta$ , 代入(12)式有

$$\begin{cases} \frac{dr}{dt} = \sin\theta \left( \frac{2a-1}{a^2-a} r^2 \cos^2\theta + \frac{1}{a^2-a} r^3 \cos^3\theta \right), \\ \frac{d\theta}{dt} = 1 + \frac{2a-1}{a^2-a} r \cos^3\theta + \frac{1}{a^2-a} r^2 \cos^4\theta. \end{cases}$$

或

$$\frac{dr}{d\theta} = \sin\theta [g_2(\cos\theta)r^2 + g_3(\cos\theta)r^3 + \dots], \quad (13)$$

其中  $g_k (k=2, 3, \dots)$  为多项式函数, 令  $r = d + r_2 d^2 + r_3 d^3 + \dots$ , 代入(13)式, 比较  $d^k (k=2, 3, \dots)$  的系数, 可知  $\frac{dr_k}{d\theta} = \sin\theta f_k(\cos\theta)$ , 这里  $f_k$  也是多项式函数, 故  $r_k(\theta) - r_k(\theta) = -\int_0^\theta f_k(\cos\theta) d\cos\theta = F_k(\cos\theta)$ ,  $F_k(2, 3, \dots)$  也是多项式函数,  $r_k(0) = 0$ , 故  $r_k(\theta)$  为具有  $2\pi$  周期的周期函数. 于是  $(0, 0)$  为(10)的中心, 即  $(a, 0)$  为(9)的中心.

下面对  $c=0$  时的情形做详细的相平面分析. 当  $0 < a < 1/2, c=0$  时, 由(2)可得

$\dot{\xi} = a\xi - (1+a)\xi^2 + \xi^3$ , 两边同乘  $\xi$  并从 0 到  $\xi$  积分, 则有  $\frac{1}{2}\xi^2 = \int_0^\xi [au - (1+a)u^2 + u^3] du + A$ . 当  $A=0$  时, 可得到(2)的解:  $\frac{1}{2}\eta^2 = \int_0^\xi [au - (1+a)u^2 + u^3] du$ , 这个解是一条围绕  $(a, 0)$ , 从  $(0, 0)$  到  $(0, 0)$  的曲线, 但它不能到达  $(1, 0)$  点, 因为当  $0 < a < 1/2$  时,  $\int_0^1 [au - (1+a)u^2 + u^3] du < 0$ . 当  $1/2 < a < 1, c=0$  时, (2)有解  $\frac{1}{2}\eta^2 = \int_0^\xi [au - (1+a)u^2 + u^3] du + 1$ , 它是一条围绕  $(a, 0)$ , 从  $(1, 0)$  到  $(1, 0)$  的曲线, 但它不能到达  $(0, 0)$ . 当  $a=1/2, c=0$  时, 由定理 2 知(2)有解

$$\begin{cases} \xi = 1/(1 + e^{-\sqrt{2}/2t}), \\ \eta = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\sqrt{2}/2t} / (1 + e^{-\sqrt{2}/2t})^2, \end{cases} \quad \text{和} \quad \begin{cases} \xi = 1/(1 + e^{\sqrt{2}/2t}), \\ \eta = -\frac{\sqrt{2}}{2} e^{\sqrt{2}/2t} / (1 + e^{\sqrt{2}/2t})^2. \end{cases}$$

它们分别是  $(0, 0)$  到  $(1, 0)$  和从  $(1, 0)$  到  $(0, 0)$  的解曲线.

下面讨论无穷远奇点. 作 Poincaré 变换, 令  $\xi = \frac{1}{z}, \eta = \frac{u}{z}, \frac{dr}{dt} = \frac{1}{z^2}$ , 则(2)变成

$$\begin{cases} \frac{du}{d\tau} = 1 - (1+a)z + az^2 + cz^2u - z^2u^2, \\ \frac{dz}{d\tau} = -uz^3. \end{cases} \quad (14)$$

显然(14)在  $u$  轴上无奇点. 再令  $\xi = \frac{v}{z}, \eta = \frac{1}{z}, \frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{z^2}$ , (2)变为

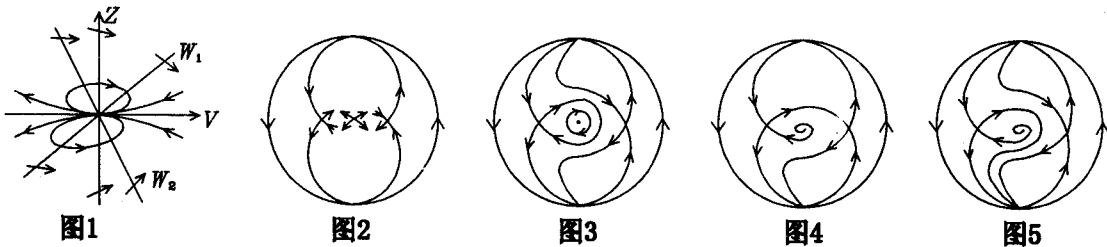
$$\begin{cases} \frac{dv}{d\tau} = z^2 - az^2v^2 - cz^2v + (1+a)zv^3 - v^4, \\ \frac{dz}{d\tau} = -cz^3 + (1+a)z^2v^2 - zv^3 - az^3v. \end{cases} \quad (15)$$

故  $(0,0)$  是(15)的高阶奇点. 在  $z=0$  上,  $\dot{v} = -v^4, \dot{z} = 0$ ; 在  $v=0$  上,  $\dot{v} = z^2, \dot{z} = -cz^3$ ; 在直线  $w_1: v-z=0$  上,  $\dot{v} = z^2 + o(z^2), \dot{z} = -cz^3$ ; 在直线  $w_2: v+z=0$  上,  $\dot{v} = z^2 + o(z^2), \dot{z} = -cz^3 + o(z^3)$ ; 这样在  $(0,0)$  的充分小的邻域内就出现了两个椭圆区域, 无双曲区域. 由 Bendixson 公式可知它的指标为 2. 这个奇点的局部性态见图 1 和图 2.

综上所述, 便可以得到(2)的全部相图, 见图 3—图 15, 在  $(a, c)$  平面上的分支曲线见图 16. 区域 I 对应于图 5 在  $a < \frac{1}{2}$  的情形, VII 对应于图 5 在  $a > \frac{1}{2}$  时的情形, 它们的相图具有同样的拓扑结构. 区域 III 对应于图 12 ( $a < \frac{1}{2}$ ), V 对应于图 12 ( $a > \frac{1}{2}$ ), IV 对应于图 8 ( $a < \frac{1}{2}$ ),  $l_8$  对应于图 8 ( $a = \frac{1}{2}$ ); VIII 对应于图 8 ( $a > \frac{1}{2}$ ). 上述现象出现的原因在于当  $a > \frac{1}{2}$  时, (1)式可变形为(8)式, 这在前文中已有讨论. 所有这些结果都在表 1 中给出.

表 1

$l_5$	I	$l_1$	II, $l_9$	III	$l_2$	IV, $l_{10}$	$a=1/2$ $c=0$	$l_7$
图 3	图 5 ( $a < \frac{1}{2}$ )	图 4	图 6	图 12 ( $a < \frac{1}{2}$ )	图 7	图 8 ( $a < \frac{1}{2}$ )	图 9	图 10
$l_8$	$l_6$	V	$l_3$	VI, $l_{11}$	VII	$l_4$	VIII, $l_{12}$	
图 8 ( $a = \frac{1}{2}$ )	图 11	图 12 ( $a > \frac{1}{2}$ )	图 13	图 14	图 5 ( $a > \frac{1}{2}$ )	图 15	图 8 ( $a > \frac{1}{2}$ )	



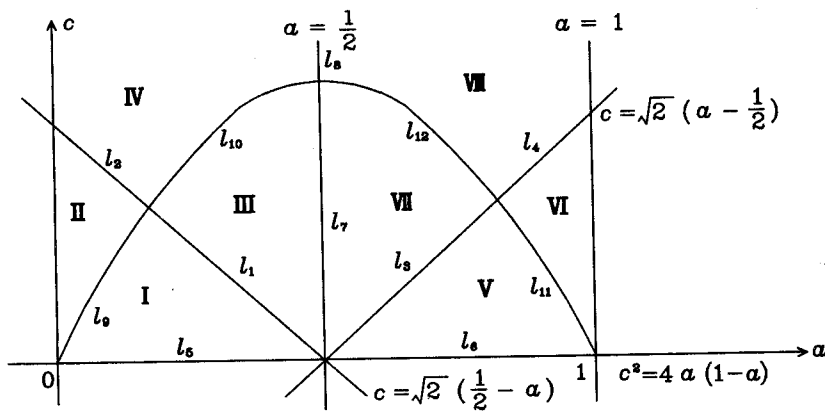
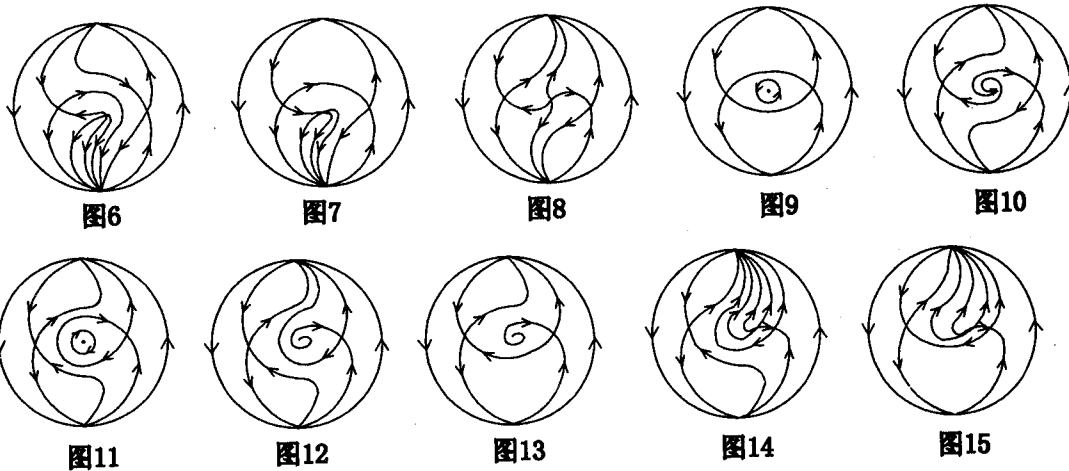


图16

致谢 作者感谢华中师范大学路钢教授的指导.

参考文献:

[1] FIFE P C. *Mathematical Aspects of Reacting and Diffusing Systems, Lecture Notes in Biomathematics* 28 [M]. Springer-Verlag, New York Heidelberg Berlin, 1979.  
 [2] MCKEAN H P. *Nagumo's Equation* [J]. *Adv. in Math.*, 1970, 4: 209—223.  
 [3] 路 钢. 自催化反应中双稳态与振动关系的一个模型 [J]. *南京大学学报数学半年刊, 全国常微定性会议论文集*, 1993, 219—223.  
 [4] 梁肇军. *多项式微分系统全局分析导引* [M]. 武汉: 华中师范大学出版社, 1989.

## Two Results about a Reaction-Diffusion Equation

KANG Dong-sheng

(Dept. of Math., Zhumadian Teachers' College, Henan 463000)

**Abstract:** In this paper, we study the travelling—wave solutions of a reaction—diffusion equation, and investigate the phase plane portraits of a planar cubic system.

**Key words:** Reaction-diffusion equation; travelling-wave solution; planar polynomial system; global phase portrait.