第20卷第2期　　数学研究与评论　　Vol. 20 No. 2
2000年5月　　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　　May 2000

一类非线性波动方程的椭圆余弦解*

张书文[1]，　王　辉[2]

(1. 青岛大学师范学院物理系，266071；2. 青岛海洋大学环境学院，266003；
1,2. 海洋环境科学和数值模拟国家海洋局重点实验室，青岛 266071)

摘　要：本文研究了一类非线性波动方程$\begin{cases}\frac{\partial \vec{U}}{\partial t}+\vec{U}\cdot\nabla\vec{U}+\vec{F}\times\vec{U}=-g\nabla h\\ \frac{\partial h}{\partial t}+\nabla h\vec{U}=0\end{cases}$讨论了一维波动方程椭圆余弦函数解存在的条件及二维波动方程的简化问题.

关键词：轨线；椭圆积分；非线性波动方程.

分类号：AMS(1991) 35K60/CLC O175.29

文献标识码：A　　　**文章编号**：1000-341X(2000)02-0233-04

浅层流体的基本控制方程可表示为[1]：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial \vec{U}}{\partial t}+\vec{U}\cdot\nabla\vec{U}+\vec{F}\times\vec{U}=-g\nabla h,\\ \dfrac{\partial h}{\partial t}+\nabla h\vec{U}=0,\end{cases}\tag{1}$$

式中$\vec{U}=(u,v,0)$为流体速度，$h=h(x,y,t)$为自由波面相对于$z=0$的高度，$u=u(x,y,t)$与$v=v(x,y,t)$为流体速度$\vec{U}$的水平分量，g为重力加速度，$\vec{F}=(0,0,f)$，f为常数，∇为梯度算子. 本文考虑方程(1)的一维波动解和二维情形的简化问题.

1　一维波动解

为简化问题，不妨设方程(1)中各变量与y无关，于是方程(1)简化为：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}+\dfrac{\partial u}{\partial x}-fv=-g\dfrac{\partial h}{\partial x},\\ \dfrac{\partial v}{\partial t}+u\dfrac{\partial v}{\partial x}+fu=0,\\ \dfrac{\partial h}{\partial t}+u\dfrac{\partial h}{\partial x}+h\dfrac{\partial u}{\partial x}=0.\end{cases}\tag{2}$$

* 收稿日期：1997-03-31；修订日期：1999-06-23

基金项目：高等学校博士学科点专项科研基金资助课题(97042301)

作者简介：张书文(1962-)，男，博士，山东省栖霞市人，青岛大学师范学院副教授.

设方程(2)沿 x 方向的波动解为:$u=u(\theta),v=v(\theta),h=h(\theta),\theta=kx-\omega t,k$ 为 x 方向的波数,ω 为圆频率,于是有

$$\begin{cases}(ku-\omega)u'-fv=-gkh', & (3.1)\\ (ku-\omega)v'+fu=0, & (3.2)\\ (ku-\omega)h'+hku'=0, & (3.3)\end{cases}$$

式中 u',v',h' 分别为 $u=u(\theta),v=v(\theta),h=h(\theta)$ 关于 θ 的一阶导数. 由式(3.3)得

$$h=-c_0/(ku-\omega), \tag{4}$$

式中 c_0 为积分常数.

将(4)式代入(3.1),(3.2)式,有

$$\begin{cases}u'=f(ku-\omega)^2v/[(ku-\omega)^3+c_1^3],\\ v'=-fu/(ku-\omega),\end{cases} \tag{5}$$

式中 $c_1=(c_0gk^2)^{1/3}$.

方程(5)可改写为

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}=-(ku-\omega)^3v/[(ku-\omega)^3+c_1^3]u. \tag{6}$$

方程(6)的解为

$$u^2+v^2-c_2/(ku-\omega)-c_3/(ku-\omega)^2+c_4=0, \tag{7}$$

式中 $c_2=2c_0g>0,c_3=c_0g\omega>0,c_4$ 为积分常数.

将方程(5)在点(0,0)处展成 Taylor 级数,并取其一阶近似,有

$$\begin{cases}u'=f\omega^2v/(c_1^3-\omega^3),\\ v'=-fu/\omega.\end{cases} \tag{8}$$

方程(8)的轨线方程为

$$u^2+\frac{\omega^3}{\omega^3-c_1^3}v^2=c, \tag{9}$$

式中 $c>0$ 为积分常数.

定理 1 方程(5)在点(0,0)附近轨线闭合的必要条件为方程(8)以点(0,0)为中心.

证明 引入辅助函数 $f(u)=-u^2+c_2/(ku-\omega)+c_3/(ku-\omega)^2-c_4$,则有

(1) $f(u)$ 关于 u 对称;

(2) $u=\omega/k$ 为 $f(u)$ 的极点;

(3) $f'(u)=0$ 的点为 $u_1=0,u_2=(\omega-c_1)/k$.

设 $a_i(i=1,2,3,4)$ 为 $f(u)$ 的零点,经推导有

$$a_1<u_1<a_2<u_2<a_3<\omega/k<a_4. \tag{10}$$

定理 2 方程(5)的轨线闭合的条件为(1) $\omega>c_1$; (2) $a_1\leqslant u\leqslant a_2$.

证明 当 u 从 $a_2\to 0$ 时,v' 严格单调上升,故 v 值的变化为从 0 递减至 $\sqrt{f(0)}$,而当 u 从 $0\to a_1$ 的过程中,v' 严格单调递减,v 值的变化为从 $\sqrt{f(0)}$ 递减至 0,从而证明轨线完全闭合.

定理 3 方程(5)在条件(1) $\omega>c_1$; (2) $a_1\leqslant u\leqslant a_2$ 下,存在椭圆余弦解.

证明 由 $f(u)=-\dfrac{\prod_{i=1}^{4}(u-a_i)}{(ku-\omega)^2}$, $v=\pm\sqrt{\prod_{i=1}^{4}(u-a_i)}/(ku-\omega)$ 及方程(5)得

$$u' = \frac{\pm f(ku-\omega)}{(ku-\omega)^3 + c_1^3}\sqrt{\prod_{i=1}^{4}(u-a_i)}.$$

置

$$I \overset{\triangle}{=} \int [(ku-\omega)^3 + c_1^3]\mathrm{d}u/(ku-\omega)\sqrt{\prod_{i=1}^{4}(u-a_i)} = \pm f(\theta) + D_\pm, \tag{12}$$

式中 $D_\pm$ 为积分常数，对应于上、下半平面上的半支曲线. 为简单计，取

$$\begin{cases} r = ku-\omega, r_i = (a_i-\omega)+(k-1)u \quad (i=1,2,3,4), \\ \alpha = (r_2-r_1)/(r_4-r_2) > 0,\ p = (r_4-r_3)/(r_3-r_1) > 0, \\ \beta = \alpha r_4/r_1, m^2 = (r_4-r_3)(r_2-r_1)/(r_4-r_2)(r_3-r_1) = 2p, \\ \omega_0 = 2[(r_4-r_2)(r_3-r_1)]^{-1/2}, \xi^2 = -(r-r_1)/2(r-r_4), \\ \eta = (1-\xi^2)(1-m^2\xi^2). \end{cases} \tag{13}$$

由(12)，(13)式，有

$$\begin{aligned} I &= k\omega_0\int [(r_4+k/r_4) - 2r_4(r_4-r_1)/(1+2\xi^2) + (r_4-r_1)^2/(1+2\xi^2)^2 + \\ &\quad k(r_4-r_1)/r_1r_4(1+\beta\xi^2)]\frac{\mathrm{d}\xi}{\sqrt{\eta}} \\ &\overset{\triangle}{=} I_1 + I_2 + I_3 + I_4. \end{aligned} \tag{14}$$

经一系列推导，可得方程(5)的椭圆余弦解为

$$u = \frac{a_1 - \alpha a_4(1 - C_n^2 X)}{1 + \alpha(1 - C_n^2 X)}, \tag{15}$$

式中 $C_n^2 = 1-\xi^2, X = \int \frac{\mathrm{d}\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)(1-m^2\xi^2)}}$.

2　二维波动方程的简化

方程(1)的二维分量表示式为

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} - fv = -g\frac{\partial h}{\partial x}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + fu = -g\frac{\partial h}{\partial x}, \\ \frac{\partial h}{\partial t} + u\frac{\partial h}{\partial x} + v\frac{\partial h}{\partial y} + h(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}) = 0. \end{cases} \tag{16}$$

对方程(16)作如下变换

$$\begin{cases} X = ku + lv, \\ Y = kv - lu, \end{cases} \tag{17}$$

式中 k,l 为波矢量在水平方向的分量，将变换(17)代人方程(16)，有

$$\begin{cases} (X-\omega)X' - fY = -gk^2h', \\ (X-\omega)Y' + fX = 0, \\ (X-\omega)h' + hX' = 0. \end{cases} \tag{18}$$

由(18)式,可得

$$\begin{cases} X' = f(X-\omega)^2 Y / [(X-\omega)^3 + gk^2 c_5], \\ Y' = -fX/(X-\omega). \end{cases} \tag{19}$$

方程(19)形式上完全类似于方程(5),可按一维情形求解(19)式.

参考文献:

[1] 王斌等译. 地球物理流体动力学导论 [M]. 北京:海洋出版社, 1981, 60—62.

[2] 张锦炎. 常微分方程几何理论与分歧问题 [M]. 北京:北京大学出版社, 1977.

The Elliptical Cosine Solution of a Type of Nonlinear Wave Equation

ZHANG Shu-wen[1], WANG Hui[2]

(1. Normal College, Qingdao University, 266071; 2. Marine Environmental College, Ocean University of Qingdao, 266003; 1,2. Key Laboratory of Marine Science and Numerical Modelling, State Oceanic Adminstration, Qingdao 266071)

Abstract: A type of nonlinear wave equation

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \vec{U} \cdot \nabla \vec{U} + \vec{F} \times \vec{U} = -g \nabla h, \\ \dfrac{\partial h}{\partial t} + \nabla h \vec{u} = 0 \end{cases}$$

has been investigated in this paper and the existing condition is discussed for obtaining the cnoidal solution.

Key words: trajectory; elliptic integration; nonlinear wave equation.