一类非线性多重调和方程$\triangle^m u=f(|x|,u,|\nabla u|)$的正整解*

许 兴 业

(广东教育学院数学系,广州 510310)

摘 要:本文建立了一类$R^n(n\geqslant 3)$中非线性多重调和方程$\triangle^m u=f(|x|,u,|\nabla u|)(m\geqslant 2)$正的径向对称整体解的存在性定理,并给出了解的有关性质,推广了文[1]-[4]的有关结果.

关键词:多重调和方程;正整解;闭凸子集;相对紧;不动点定理.

分类号:AMS(1991) 35J30/CLC O175.25

文献标识码:A **文章编号**:1000-341X(2000)02-0237-06

1 引 言

本文研究一类非线性多重调和方程

$$\triangle^m u=f(|x|,u,|\nabla u|),x\in R^n,n\geqslant 3,m\geqslant 2 \tag{1.1}$$

的正整解的存在性,并给出了解的有关性质.其中,$\triangle$表示 Laplace 算子,$|x|$表示x的 Euclidean 长度,∇表示 Harmilton 算子.(1.1)的整体解定义为$u\in C^{2m}(R^n)$且在R^n中逐点满足(1.1).

2 引 理

为了证明本文的结果,我们引进积分算子$\Phi:C[0,\infty)\to C^2[0,\infty)$如下:

$$(\Phi h)(t)=\frac{1}{n-2}\int_0^t[1-(\frac{s}{t})^{n-2}]sh(s)\mathrm{d}s,\ t\geqslant 0,n\geqslant 3. \tag{2.1}$$

引理1 设$h\in C[0,\infty)$,则有$(\triangle\Phi h)(|x|)=h(|x|)$.

由(2.1)并利用 Laplace 算子的极形式$\triangle=t^{1-n}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(t^{n-1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t})$及$t=|x|$,易证引理1成立.

引理2 设$h\in C[0,\infty)$,则函数$u(x)=(\Phi^m h)(|x|)$是方程$(\triangle^m u)(x)=h(|x|)(x\in R^n,n\geqslant 3,m=1,2,3,\cdots)$的经向对称整体解;若再假设$h\geqslant 0$,则有

$$0\leqslant(\Phi^m h)(t)\leqslant\frac{1}{(n-2)^m}(\frac{t^2}{2})^{m-1}\int_0^t sh(s)\mathrm{d}s,\quad t\geqslant 0. \tag{2.2}$$

证明 由引理1及数学归纳法容易证明第一个结论成立.若$h\geqslant 0$,由(2.1),利用 Dirichlet 积分公式$\int_a^b(\int_a^x f(x,y)\mathrm{d}y)\mathrm{d}x=\int_a^b(\int_y^b f(x,y)\mathrm{d}x)\mathrm{d}y$及数学归纳法可证(2.2)式成立.事实上,当$m=1$时,由(2.1)式有

* 收稿日期:1997-03-14

作者简介:许兴业(1952-),男,广东省普宁市人,广东教育学院副教授.

$$0 \leqslant (\Phi h)(t) \leqslant \frac{1}{(n-2)}\int_0^t sh(s)\mathrm{d}s, \quad t \geqslant 0. \tag{2.3}$$

显然成立. 假设当 $m=k-1$ 时结论成立,即 $0\leqslant(\Phi^{k-1}h)(t)\leqslant\frac{1}{(n-2)^{k-1}}(\frac{t^2}{2})^{k-2}\int_0^t sh(s)\mathrm{d}s\,(t\geqslant 0)$,则当 $m=k$ 时有

$$\begin{aligned}0\leqslant (\Phi^k h)(t) &= \Phi^{k-1}[(\Phi h)(t)] \leqslant \frac{1}{(n-2)^{k-1}}(\frac{t^2}{2})^{k-2}\int_0^t s(\Phi h)(s)\mathrm{d}s \\ &\leqslant \frac{1}{(n-2)^k}(\frac{t^2}{2})^{k-2}\int_0^t s\int_0^t rh(r)\mathrm{d}r\mathrm{d}s = \frac{1}{(n-2)^k}(\frac{t^2}{2})^{k-2}\int_0^t rh(r)\mathrm{d}r\int_r^t s\mathrm{d}s \\ &\leqslant \frac{1}{(n-2)^k}(\frac{t^2}{2})^{k-1}\int_0^t sh(s)\mathrm{d}s, \quad t\geqslant 0.\end{aligned} \tag{2.4}$$

故(2.2)式对一切 m 成立.

3 主要结果

在下面的讨论中我们引入记号 $\Omega\equiv[0,\infty)\times(0,\infty)\times[0,\infty)$, $k(s)=\begin{cases}1, & 0\leqslant s\leqslant 1;\\ s, & s>1.\end{cases}$ 并假设函数 f 满足以下条件,不再另述.

(A) 存在连续函数 $F:\Omega\to[0,\infty)$,使得 $|f(t,u,v)|\leqslant F(t,u,v)$, $(t,u,v)\in\Omega$.

定理 1 设函数 $F(t,u,v)$ 满足(Ⅰ),(Ⅱ)$_1$,(Ⅲ)或(Ⅰ),(Ⅱ)$_2$,(Ⅲ):

(Ⅰ) 对固定的 $t\geqslant 0$, $F(t,u,v)$ 关于 $u\in(0,\infty)$ 非减,关于 $v\in[0,\infty)$ 非增;

(Ⅱ)$_1$ 对固定的 $(t,u,v)\in\Omega$, $\lambda^{-1}F(t,\frac{2}{3}\lambda u,\frac{2m-3}{3}\lambda v)$ 关于 $\lambda\in(0,\infty)$ 非增,且

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda^{-1}F(t,\frac{2}{3}\lambda u,\frac{2m-3}{3}\lambda v)=0;$$

(Ⅱ)$_2$ 对固定的 $(t,u,v)\in\Omega$, $\lambda^{-1}F(t,\frac{2}{3}\lambda u,\frac{2m-3}{3}\lambda v)$ 关于 $\lambda\in(0,\infty)$ 非减,且

$$\lim_{\lambda\to 0^+}\lambda^{-1}F(t,\frac{2}{3}\lambda u,\frac{2m-3}{3}\lambda v)=0;$$

(Ⅲ) 存在常数 $c<0$ 使 $\int_0^\infty k(t)F(t,\frac{2}{3}c(1+t^{2m-2}),\frac{2m-3}{3}ct^{2m-3})<\infty$,

则方程(1.1)都存在无穷多个正的径向对称整体解 $u(x)$,且具有性质 $c_1(1+|x|^{2m-2})\leqslant u(x)\leqslant c_2(1+|x|^{2m-2})$,其中 c_1,c_2 是某两个正常数.

证明 先证 $F(t,u,v)$ 满足条件(Ⅰ),(Ⅱ)$_1$,(Ⅲ)的情形. 由(Ⅱ)$_1$ 有 $\lambda^{-1}k(t)F(t,\frac{2}{3}\lambda(1+t^{2m-2}),\frac{2m-3}{3}\lambda t^{2m-3})\leqslant c^{-1}k(t)F(t,\frac{2}{3}c(1+t^{2m-2}),\frac{2m-3}{3}ct^{2m-3})$ 对一切 $t\geqslant 0$, $c\leqslant\lambda<\infty$ 成立,其中 c 和 $k(t)$ 是(Ⅲ)中出现的常数和函数,且对一切 $t\geqslant 0$ 有 $\lim_{\lambda\to\infty}\lambda^{-1}k(t)F(t,\frac{2}{3}\lambda(1+t^{2m-2}),\frac{2m-3}{3}\lambda t^{2m-3})=0$. 由(Ⅲ)利用 Lebesque 控制收敛定理得

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda^{-1}\int_0^\infty k(t)F(t,\frac{2}{3}\lambda(1+t^{2m-2}),\frac{2m-3}{3}\lambda t^{2m-3})\mathrm{d}t=0. \tag{3.1}$$

故存在充分大的正数 $\eta(3\eta\geqslant c)$ 使得

$$\int_0^\infty k(t)F(t,2\eta(1+t^{2m-2}),(2m-3)\eta t^{2m-3})\mathrm{d}t<\eta. \tag{3.2}$$

按通常的方法引进 $C^1[0,\infty)$ 的拓扑，作集合

$$Y=\{y\in C^1[0,\infty)\mid \frac{\eta}{2}(1+t^{2m-2})\leqslant y(t)\leqslant 2\eta(1+t^{2m-2}),$$

$$(2m-3)\eta t^{2m-3}\leqslant y'(t)\leqslant(2m-1)\eta t^{2m-3},t\geqslant 0\}. \tag{3.3}$$

易见 Y 是 $C^1[0,\infty)$ 中的闭凸子集，定义映照 $\Psi:Y\to C^1[0,\infty)$ 如下：

$$(\Psi y)(t)=\eta(1+t^{2m-2})+\Phi^m f(t,y(t),|y'(t)|),t\geqslant 0. \tag{3.4}$$

下面验证映照 Ψ 满足：

(i) $\Psi:Y\to Y$. 事实上，对 $\forall\ y\in Y$ 由(B)，(3.3)及(Ⅰ)有 $|f(t,y(t),|y'(t)|)|\leqslant F(t,2\eta(1+t^{2m-2}),(2m-3)\eta t^{2m-3})(t\geqslant 0)$. 进而由(2.2)及(3.2)有

$$\begin{aligned}|\Phi^m f(t,y(t),|y'(t)|)&\leqslant\Phi^m F(t,2\eta(1+t^{2m-2}),(2m-3)\eta t^{2m-3})\\&\leqslant\frac{1}{(n-2)^m}(\frac{t^2}{2})^{m-1}\int_0^t sF(s,2\eta(1+s^{2m-2}),(2m-3)\eta s^{2m-3})\mathrm{d}s\\&\leqslant\frac{1}{2}t^{2m-2}\int_0^\infty k(s)F(s,2\eta(1+s^{2m-2}),(2m-3)\eta s^{2m-3})\mathrm{d}s\\&\leqslant\frac{\eta}{2}t^{2m-2},\quad t\geqslant 0.\end{aligned}$$

故 $|\Psi y(t)-\eta(1+t^{2m-2})|=|\Phi^m f(t,y(t),|y'(t)|)\leqslant\frac{\eta}{2}t^{2m-2},t\geqslant 0$. 从而

$$\begin{aligned}\frac{\eta}{2}(1+t^{2m-2})\leqslant\eta(1+t^{2m-2})-\frac{\eta}{2}t^{2m-2}\leqslant(\Psi y)(t)\leqslant\eta(1+t^{2m-2})+\frac{\eta}{2}t^{2m-2}\\<2\eta(1+t^{2m-2}),\quad t\geqslant 0.\end{aligned} \tag{3.5}$$

又由(3.4)得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\Psi y)(t)=(2m-3)\eta t^{2m-3}+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi^m f(t,y(t),|y'(t)|). \tag{3.6}$$

注意到对 $\forall\ t\in[0,\infty)$ 由(2.2)，(3.2)有：

$$\begin{aligned}|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi^m f(t,y(t),|y'(t)|)&=|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi[\Phi^{m-1}f(t,y(t),|y'(t)|)]|\\&=|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\{\frac{1}{n-2}\int_0^t[1-(\frac{s}{t})^{n-2}]s\Phi^{m-1}f(s,y(s),|y'(s)|)\mathrm{d}s\}|\\&=|\int_0^t(\frac{s}{t})^{n-1}\Phi^{m-1}f(s,y(s),|y'(s)|)\mathrm{d}s| \qquad (3.7)_1\\&\leqslant\int_0^t\Phi^{m-1}|f(s,y(s),|y'(s)|)|\mathrm{d}s\\&\leqslant\frac{1}{(n-2)^{m-1}}(\frac{t^2}{2})^{m-2}\int_0^t\mathrm{d}s\int_0^s r|f(r,y(r),|y'(r)|)|\mathrm{d}r\\&\leqslant\frac{t}{(n-2)^{m-1}}(\frac{t^2}{2})^{m-2}\int_0^t r|f(r,y(r),|y'(r)|)|\mathrm{d}r \qquad (3.7)_2\\&\leqslant\frac{t}{(n-2)^{m-1}}(\frac{t^2}{2})^{m-2}\int_0^\infty k(r)F(r,2\eta(1+r^{2m-2}),(2m-3)\eta r^{2m-3})\mathrm{d}r\\&\leqslant\eta t^{2m-3}. \qquad (3.8)\end{aligned}$$

从而由(3.6)，(3.8)得

$$(2m-3)\eta t^{2m-3}=(2m-3)\eta t^{2m-3}-\eta t^{2m-3}\leqslant(\Psi y)'(t)$$

$$\leqslant (2m-2)\eta t^{2m-3}+\eta t^{2m-3}\leqslant (2m-1)\eta t^{2m-3}, \quad t\geqslant 0. \tag{3.9}$$

由(3.5)及(3.9)知 $\Psi Y\subset Y$.

(ii) Ψ 是连续映照. 设 $y_i, y\in Y(i=1,2,\cdots)$ 且 y_i 依 $C^1[0,\infty)$ 的拓扑收敛于 y. 对 $\forall\, t\in[0,t_1]\subset[0,\infty)$ 由(3.4),(2.2)得

$$|(\Psi y_i)(t)-(\Psi y)(t)|=|\Phi^m f(t,y_i(t),|y_i'(t)|)-\Phi^m f(t,y(t),|y'(t)|)|$$
$$\leqslant \Phi^m|f(t,y_i(t),|y_i'(t)|)-f(t,y(t),|y'(t)|)|$$
$$\leqslant \frac{1}{(n-2)^m}\left(\frac{t_1^2}{2}\right)^{m-1}\int_0^t s|f(s,y_i(s),|y_i'(s)|)-f(s,y(s),|y'(s)|)|\mathrm{d}s,\ 0\leqslant t\leqslant t_1. \tag{3.10}$$

注意到

$$|f(t,y_i(t),|y_i'(t)|)-f(t,y(t),|y'(t)|)|\leqslant 2F(t,2\eta(1+t^{2m-2}),(2m-3)\eta t^{2m-3}). \tag{3.11}$$

又由(A)及假设 y_i 收敛于 y, 于是有

$$\lim_{i\to\infty}|f(t,y_i(t),|y_i'(t)|)-f(t,y(t),|y'(t)|)|=0, \quad 0\leqslant t\leqslant t_1. \tag{3.12}$$

于是从(3.10),(3.11),(3.12)及(3.2),依 Lebesgue 控制收敛定理知

$$\max_{0\leqslant t\leqslant t_1}|(\Psi y_i)(t)-(\Psi y)(t)|\to 0, \quad 当\ i\to\infty. \tag{3.13}$$

再由(3.6)及$(3.7)_2$有

$$|(\Psi y_i)'(t)-(\Psi y)'(t)|=\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi^m[f(t,y_i(t),|y_i'(t)|)-f(t,y(t),|y'(t)|)]\right|$$
$$\leqslant \frac{t_1}{(n-2)^{m-1}}\left(\frac{t_1^2}{2}\right)^{m-2}\int_0^t r|f(r,y_i(r),|y_i'(r)|)-f(r,y(r),|y'(r)|)|\mathrm{d}r,\ 0\leqslant t\leqslant t_1. \tag{3.14}$$

由(3.14),(3.11),(3.12)及(3.2),依 Lebesgue 控制收敛定理知

$$\max_{0\leqslant t\leqslant t_1}|(\Psi y_i)'(t)-(\Psi y)'(t)|\to 0, \quad 当\ i\to\infty. \tag{3.15}$$

从(3.13)及(3.15)知映照 Ψ 是连续的.

(iii) ΨY 是相对紧的. 由(3.6),(3.7),对 $\forall\, y\in Y$ 得

$$(\Psi y)''(t)=(2m-2)(2m-3)\eta t^{2m-4}+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^t\left(\frac{s}{t}\right)^{n-1}\Phi^{m-1}f(s,y(s),|y'(s)|)\mathrm{d}s$$
$$=(2m-2)(2m-3)\eta t^{2m-4}+\Phi^{m-1}f(t,y(t),|y'(t)|)-$$
$$(n-1)\int_0^t\left(\frac{s}{t}\right)^n\frac{1}{s}\Phi^{m-1}f(s,y(s),|y'(s)|)\mathrm{d}s$$
$$=(2m-3)(2m-3)\eta t^{2m-4}+\mathrm{I}_1+\mathrm{I}_2$$

对上式右边第二、三项进行估计. 由(2.2)及(3.2)得

$$|\mathrm{I}_1|\leqslant \Phi^{m-1}|f(t,y(t),|y'(t)|)|\leqslant \Phi^{m-1}F(t,2\eta(1+t^{2m-2}),(2m-3)\eta t^{2m-3})$$
$$\leqslant \frac{1}{(n-2)^{m-1}}\left(\frac{t^2}{2}\right)^{m-2}\int_0^\infty k(s)F(s,2\eta(1+s^{2m-2}),(2m-3)\eta s^{2m-3})\mathrm{d}s$$
$$\leqslant \frac{\eta}{(n-2)^{m-1}}\left(\frac{t_1^2}{2}\right)^{m-1}\equiv \alpha_1, \quad 0\leqslant t\leqslant t_1;$$

$$|\mathrm{I}_2|\leqslant (n-1)\int_0^t\frac{1}{s}\Phi^{m-1}|f(s,y(s),|y'(s)|)|\mathrm{d}s$$
$$\leqslant \frac{n-1}{(n-2)^{m-1}}\left(\frac{t^2}{2}\right)^{m-2}\int_0^t\mathrm{d}s\int_0^s F(r,2\eta(1+r^{2m-2}),(2m-3)\eta r^{2m-3})\mathrm{d}r$$
$$=\frac{n-1}{(n-2)^{m-1}}\left(\frac{t^2}{2}\right)^{m-2}\int_0^t F(r,2\eta(1+r^{2m-2}),(2m-3)\eta r^{2m-3})\mathrm{d}r\int_r^t\mathrm{d}s$$

$$\leqslant \frac{(n-1)t}{(n-2)^{m-1}}(\frac{t^2}{2})^{m-2}\int_0^\infty k(s)F(r,2\eta(1+r^{2m-2}),(2m-3)\eta r^{2m-3})\mathrm{d}r,$$

$$\leqslant \frac{(n-1)t_1\eta}{(n-2)^{m-1}}(\frac{t_1^2}{2})^{m-1}\equiv\alpha_2,\quad 0\leqslant t\leqslant t_1;0\leqslant t\leqslant t_1.$$

从而对$\forall$ $[0,t_1]\subset[0,\infty)$有

$$|(\Psi y)''(t)|\leqslant(2m-2)(2m-3)\eta t_1^{2m-4}+\alpha_1+\alpha_2\equiv\text{常数},\quad 0\leqslant t\leqslant t_1. \tag{3.16}$$

故由(3.5),(3.9)和(3.16)知$\{(\Psi y)(t)\,|\,y\in Y\}$及$\{(\Psi y)'(t)\,|\,y\in Y\}$在$[0,t_1]$上一致有界且等度连续.

由 Ascoli-Arzela 定理(文[5]P. 10定理1. 30)知按$C^1[0,t_1]$的拓扑ΨY在Y中是相对紧的.进一步可以用取对角线的方法,证明按$C^1[0,\infty)$的拓扑ΨY在Y中是相对紧的.

由(i),(ii),(iii)知 Schauder-Tychonoff 不动点定理的条件均满足,故映照Ψ存在不动点$y\in Y$(文[6]P. 161).由(3.4)知y满足:$y(t)=\eta(1+t^{2m-2})+\Phi^m f(t,y(t),|y'(t)|),t\geqslant 0$.注意到$\triangle^m$是$2m$阶求导算子,由引理2得

$$(\triangle^m y)(t)=\triangle^m[\eta(1+t^{2m-2})+\Phi^m f(t,y(t),|y'(t)|)]$$
$$=\triangle^m[\Phi^m f(t,y(t),|y'(t)|)]=f(t,y(t),|y'(t)|),\quad t\geqslant 0.$$

故方程(1.1)有正的径向对称整体解$u(x)=y(|x|)$,且由(3.3)知$u(x)$具有性质$\frac{\eta}{2}(1+|x|^{2m-2})\leqslant u(x)\leqslant 2\eta(1+|x|^{2m-2}),x\in R^n,n\geqslant 3$.

另若取$\frac{\eta_1}{2}>\eta$,由(3.1),(3.2)显然η_1满足$\int_0^\infty k(t)F(t,2\eta_1(1+t^{2m-2}),(2m-3)\eta_1 t^{2m-3})\mathrm{d}t<\eta_1$.类似上面的推导可证得方程(1.1)存在正整解$u_1(x)=y_1(|x|)$,具有性质$\frac{\eta_1}{2}(1+|x|^{2m-2})\leqslant u_1(x)\leqslant 2\eta_1(1+|x|^{2m-2})$.易见$u(x)\neq u_1(x)$.依次方法进行下去,可得方程(1.1)的无穷多个正整解,且这些解具有定理1所述的性质.

对于$F(t,u,v)$满足(Ⅰ),(Ⅱ)$_2$,(Ⅲ)条件的情形,只须把证明过程中的"存在充分大的正数$\eta(3\eta\geqslant c)$使得$\int_0^\infty k(t)F(t,2\eta_1(1+t^{2m-2}),(2m-3)\eta_1 t^{2m-3})\mathrm{d}t<\eta$"改为"存在充分小的正数$\eta(3\eta\leqslant c)$使得$\int_0^\infty k(t)F(t,2\eta(1+t^{2m-2}),(2m-3)\eta t^{2m-3})\mathrm{d}t<\eta$"便可证.

运用定理1的证明方法,可证得下列的结果.

定理2 (Ⅰ)对固定的$t\geqslant 0$,$F(t,u,v)$关于$u\in(0,\infty)$非减,关于$v\in[0,\infty)$非减;

(Ⅱ) 对固定的$(t,u,v)\in\Omega$,$\lambda^{-1}F(t,\frac{2}{3}\lambda u,\frac{2m-1}{3}\lambda v)$关于$\lambda\in(0,\infty)$非增,且

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda^{-1}F(t,\frac{2}{3}\lambda u,\frac{2m-1}{3}\lambda v)=0;$$

(Ⅱ)′ 对固定的$(t,u,v)\in\Omega$,$\lambda^{-1}F(t,\frac{2}{3}\lambda u,\frac{2m-1}{3}\lambda v)$关于$\lambda\in(0,\infty)$非减,且

$$\lim_{\lambda\to 0^+}\lambda^{-1}F(t,\frac{2}{3}\lambda u,\frac{2m-1}{3}\lambda v)=0;$$

(Ⅲ) 存在常数$c>0$使$\int_0^\infty k(t)F(t,\frac{2}{3}c(1+t^{2m-2}),\frac{2m-1}{3}ct^{2m-3})\mathrm{d}t<\infty$,

则在假设(Ⅰ),(Ⅱ),(Ⅲ)或(Ⅰ),(Ⅱ)′,(Ⅲ)下,方程(1.1)均具有定理1所述的结论.

定理3 (Ⅰ)对固定的$t\geqslant 0$,$F(t,u,v)$关于$u\in(0,\infty)$非增,关于$v\in[0,\infty)$非减;

（Ⅱ） 对固定的$(t,u,v)\in\Omega,\lambda^{-1}F(t,\frac{1}{6}\lambda u,\frac{2m-1}{3}\lambda v)$关于$\lambda\in(0,\infty)$非增，且

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda^{-1}F(t,\frac{1}{6}\lambda u,\frac{2m-1}{3}\lambda v)=0;$$

（Ⅱ）′ 对固定的$(t,u,v)\in\Omega,\lambda^{-1}F(t,\frac{1}{6}\lambda u,\frac{2m-1}{3}\lambda v)$关于$\lambda\in(0,\infty)$非减，且

$$\lim_{\lambda\to 0^+}\lambda^{-1}F(t,\frac{1}{6}\lambda u,\frac{2m-1}{3}\lambda v)=0;$$

（Ⅲ） 存在常数$c>0$使$\int_0^\infty k(t)F(t,\frac{1}{6}c(1+t^{2m-2}),\frac{2m-1}{3}ct^{2m-3})\mathrm{d}t<\infty$，

则在假设（Ⅰ），（Ⅱ），（Ⅲ）或（Ⅰ），（Ⅱ）′，（Ⅲ）下，方程(1.1)均具有定理1所述的结论.

定理4 （Ⅰ）对固定的$t\geqslant 0,F(t,u,v)$关于$u\in(0,\infty)$非增，关于$v\in[0,\infty)$非增；

（Ⅱ） 存在常数$c>0$使$\int_0^\infty k(t)F(t,\frac{1}{6}c(1+t^{2m-2}),\frac{2m-1}{3}ct^{2m-3})\mathrm{d}t<\infty$，

则在假设（Ⅰ），（Ⅱ）下，方程(1.1)均具有定理1所述的结论.

注 由假设（Ⅰ）立即推出：对固定的$(t,u,v)\in\Omega,\lambda^{-1}F(t,\frac{1}{6}\lambda u,\frac{2m-1}{3}\lambda v)$关于$\lambda\in(0,\infty)$非增，且$\lim\limits_{\lambda\to\infty}\lambda^{-1}F(t,\frac{1}{6}\lambda u,\frac{2m-1}{3}\lambda v)=0$；

参考文献：

[1] WALTER W. *Ganze losungen der differentialgleichung* $\triangle^p u=f(u)$ [J]. Math. Z., 1957, **67**: 32—37.

[2] WALTER W. *Zur existenz ganzer losunger der differentialgleichung* $\triangle^p u=e^u$ [J]. Arch. Math., 1958, **9**: 308—312.

[3] WALTER W and RHEE H. *Entire solutions of* $\triangle^p u=f(r,u)$ [J]. Proc. Royal Soc. Edinburgh, 1979, **82**(A): 189—192.

[4] KUSANO T and SWANSON C A. *Positive entire solutions of semilinear Biharmonic equations* [J]. Hiroshima Math. J., 1987, 13—28.

[5] ADMAS R A. *Sobolev Spaces* [M]. New York/San Francisco/London, 1975, 10.

[6] EDWARDS R E. *Functional Analysis* [M]. Holt, Rinchart and Winston, New York, 1965, 161.

The Positive Entire Solutions of a Class of Nonlinear Multiple Harmonic Equations $\triangle^m u=f(|x|,u,|\nabla u|)$

XU Xing-ye

(Dept. of Math., Guangdong Education College, Guangzhou 510310)

Abstract: In this paper, we establish the theorems of existence of positive radially symmtry entire solutions for a class of nonlinear multiple harmonic equations $\triangle^m u=f(|x|,u,|\nabla u|)$ $(m\geqslant 2)$ on $R^n(n\geqslant 3)$ and present the properties of the solutions. The results of this paper may be regarded as an extension of [1]—[4].

Key words: multiple harmonic equation; positive entire solution; close convex subest; relative compactness; fixed point theorem.