一个非线性微分方程的周期边值问题*

李 林[1]， 俞元洪[2]

(1. 北京石油化工学院基础部，102600； 2. 北京文登学校科研所，100081)

摘 要:本文考虑作为卫星绕椭圆轨道作周期运动模型的一个二阶非线性微分方程的周期边值问题.用迭代方法证明了奇函数周期解的存在性,并且扩大了文[3]中给出的参数范围.

关键词:边值问题；周期运动；绕椭圆轨道.

分类号:AMS(1991) 34C25/CLC O175.1

文献标识码:A **文章编号**:1000-341X(2000)02-0248-03

1 引 言

考虑下列二阶周期边值问题

$$x''(t)-\frac{2e\sin t}{1+e\cos t}x'(t)+\frac{a}{1+e\cos t}\sin x(t)=\frac{4e\sin t}{1+e\cos t}, \tag{1}$$

$$x(0)-x(2\pi)=0=x'(0)-x'(2\pi). \tag{2}$$

对于参数集合$\{(e,a):0<e<1,|a|\leqslant 3\}$这个问题是由 Beletskii[1]研究卫星绕椭圆轨道作周期运动时,作为数学模型而提出的.

最近,Petryshin 和 Yu[3]用拓扑度方法又研究了这一问题,他们证明了当参数范围在$0\leqslant e<\frac{2}{\pi}|a|$,$(8\sqrt{2}+3)e+2|a|<1$时存在边值问题(1)—(2)的解.

本文的目的是证明当$|e|<1$和a任意时,问题(1)—(2)存在奇函数解.将证明,该解可以用单调迭代方法得到,证明的方法是构造性的.

2 主要结果

为了证明奇函数解的存在性,考虑方程(1)满足边界条件

$$x(0)=x(\pi)=0. \tag{3}$$

引进新变量

$$y=(1+e\cos t)x,$$

* 收稿日期:1997-02-03

基金项目:国家自然科学基金资助项目(19871090)

作者简介:李林(1963-),男,河南人,硕士,北京石油化工学院副教授.

(1)和(3)成为

$$y''+g(t,y)=0,\quad y(0)=y(\pi)=0, \tag{4}$$

其中

$$g(t,y)=\frac{e\cos t}{1+e\cos t}y+a\sin\frac{y}{1+e\cos t}-4e\sin t.$$

注意到函数 $g(t,y)$ 满足 Lipschitz 条件

$$|g(t,y_1)-g(t,y_2)|\leqslant M^2|y_1-y_2|, \tag{5}$$

其中 $M^2=\frac{|e|+|a|}{1-|e|}$. 主要结果如下

定理 若 $|e|<1$, 且 a 为任意实数, 则用单调迭代方法可以得到(4)的一个解 $y(t)$.

若令

$$x(t)=\begin{cases}\dfrac{y(t)}{1+e\cos t}, & t\in[0,\pi],\\ -\dfrac{y(2\pi-t)}{1+e\cos t}, & t\in[\pi,2\pi],\end{cases} \tag{6}$$

则 x 是问题(1)—(2)的解.

证明 对每一 $\xi\in C[0,\pi]$, 线性问题

$$\begin{aligned}&y''+g(t,\xi)-M^2(y-\xi)=0,\\&y(0)=y(\pi)=0\end{aligned} \tag{7}$$

有唯一解 $y=A\xi$, 其中 A 由下式给出

$$y(t)=C[e^{Mt}-e^{-Mt}]-\frac{e^{Mt}}{2M}\int_0^t\sigma(s)e^{-Ms}\mathrm{d}s+\frac{e^{-Mt}}{2M}\int_0^t\sigma(s)e^{Ms}\mathrm{d}s$$

和

$$\sigma(t)=g(t,\xi)+M^2\xi,$$

其中 C 的选择是使得 $y(\pi)=0$.

考虑迭代步骤如下

$$y_0=0, y_n=Ay_{n-1},\quad n\geqslant 1. \tag{8}$$

对于 $e\geqslant 0$ 和 $e<0$, 需要分别处理. 前者迭代后产生一个减序列, 后者则产生增序列. 今只考虑 $e\geqslant 0$ 的情形, 相反的情形可类似地处理.

现在, 因 $e\geqslant 0$, 故 $y_0=0$ 是问题(4)的一个上解, 因此迭代步骤(8)将产生一个减序列[2,4], 由 Lipschitz 条件(5)即得每一 y_n 是(4)的一个上解, 即

$$y_n''+g(t,y_n)\leqslant 0,\quad y_n(0)=y_n(\pi)=0. \tag{9}$$

以 y_n 乘(9), 且在 $[0,\pi]$ 上积分, 得到

$$\int_0^\pi[y_n'(t)]^2\mathrm{d}t-\int_0^\pi\frac{e\cos t}{1+e\cos t}y_n^2(t)\mathrm{d}t\leqslant(|a|+4e)\int_0^\pi|y_n(t)|\mathrm{d}t. \tag{10}$$

由 Poincaré 不等式

$$\int_0^\pi y_n^2(t)\mathrm{d}t\leqslant\int_0^\pi[y_n'(t)]^2\mathrm{d}t$$

和 Schwarz 不等式

$$\int_0^{\pi}|y_n(t)|\mathrm{d}t \leqslant \sqrt{\pi}\left(\int_0^{\pi}y_n^2(t)\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}},$$

注意到$\frac{e\cos t}{1+e\cos t}\leqslant\frac{e}{1+e}$,由(10),有

$$\frac{1}{e+1}\int_0^{\pi}[y_n'(t)]^2\mathrm{d}t \leqslant \sqrt{\pi}(|a|+4e)\left(\int_0^{\pi}[y_n'(t)]^2\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{11}$$

由(11)和 Sobolev 嵌入定理,得到

$$\max_{[0,\pi]}|y_n(t)| \leqslant K, \tag{12}$$

其中 K 是仅依赖于 a 和 e 的常数. 因为

$$y_n''+g(t,y_{n-1})-M^2(y_n-y_{n-1})=0,\ y_n(0)=y_n(\pi)=0.$$

即知 y_n 在 $C^2[0,\pi]$内有界. 因此,由 Ascoli-Arzelà 定理,可得到收敛到问题(4)的解. 易见,由(6)定义的 $x(t)$是问题(1)—(2)的解. □

参考文献:

[1] BELETSKII V V. *On the oscillation of a satellite* [J]. Iskusst Sputn. Zemli., 1959, **3**: 1—3.

[2] LAKSHMIKANTHAM V and LEELA S. *Remark on first and second order periodic boundary value problems* [J]. Nonlinear Analysis, TMA., 1984, **8**: 281—287.

[3] PETRYSHYN W V and YU Z S. *On the solvability of an equation describing the periodic motions of a satellite in its elliptic orbit* [J]. Nonlinear Analysis, TMA, 1985, **9**: 969—975.

[4] SCHMITT K. *Boundary value problems for quasilinear elliplic partial differential equations* [J]. Nonlinear Analysis, TMA, 1978, **2**: 263—309.

On a Periodic Boundary Value Problem of a Nonlinear Differential Equation

LI Lin[1], YU Yuan-hong[2]

(1. Beijing Institute of Petrochemical Technology, 102600;

2. Institute of Science, Beijing Wendeng School, 100081)

Abstract: We consider a nonlinear differential equation of second order which has been proposed as a model for the periodic motion of a satellite in its elliptic orbit. We use some elementary methods to demonstrate the existence of an odd periodic solution for a considerably larger parameter set than considered earlier.

Key words: boundary value problem; periodic motion; elliptic orbit; satellite.