第 20 卷第 2 期　　数 学 研 究 与 评 论　　Vol. 20 No. 2
2000 年 5 月　　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　　May 2000

具有"积分小"系数的一阶非线性中立型微分方程的振动性*

戴斌祥，　钱祥征
(湖南大学应用数学系，长沙 410082)

摘　要：运用一定的技巧，建立了一阶非线性中立型微分方程 $[x(t)-P(t)x(t-\tau)]'+Q(t)\prod_{i=1}^{n}|x(t-\delta_i)|^{\alpha_i}\operatorname{sign}x(t-\delta_i)=0$ 的所有解振动的新的充分条件，推广和改进了已知文献中的某些已知结论.

关键词：中立型微分方程；"积分小"系数；振动性.
分类号：AMS(1991) 34K15,34C10/CLC O175.2
文献标识码：A　　　**文章编号**：1000-341X(2000)02-0251-05

考虑一阶非线性中立型微分方程

$$[x(t)-P(t)x(t-\tau)]'+Q(t)\prod_{i=1}^{n}|x(t-\delta_i)|^{\alpha_i}\operatorname{sign}x(t-\delta_i)=0,\ t\geqslant t_0, \tag{1}$$

这里

$$P\in C([t_0,\infty),R),Q\in C([t_0,\infty),R^+),\tau>0,\delta_i,\alpha_i\geqslant 0,\text{且}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=1,i=1,2,\cdots,n. \tag{2}$$

关于方程(1)的振动性吸引了许多学者的关注[1-5]. 对于方程(1)的特殊情形：

$$[x(t)-P(t)x(t-\tau)]'+Q(t)x(t-\delta)=0,t\geqslant t_0, \tag{3}$$

钱传喜和 Ladas 在文[1]中首先证明了当 $P(t)\equiv 1$，且

$$\int_{t_0}^{\infty}Q(t)\mathrm{d}t\equiv\infty \tag{4}$$

时方程(1)的所有解振动，并进一步提出了

问题　当 $P(t)\equiv 1$ 时条件(4)是否为方程(3)的所有解振动的必要条件？

文[2]通过反例对上述问题给予了否定回答，并第一个建立了具"积分小"系数的方程的振动准则. 最近的文献[3]进一步讨论了方程(1)，证明了：如果 $P(t)\equiv 1$，且

$$\int_{t_0}^{\infty}\{Q(s)\exp\int_{t_0}^{s}[\frac{2}{\tau}uQ(u)+\frac{1}{\tau^2}Q(u)\int_{t_0}^{u}v^2Q(v)\mathrm{d}v]\mathrm{d}u\}\mathrm{d}s=\infty, \tag{5}$$

则方程(1)的所有解振动.

本文的目的是进一步地建立方程(1)的新的振动准则. 使用了一种新的技巧，通过建立比

* 收稿日期：1997-04-25
基金项目：国家自然科学基金资助项目(196010)
作者简介：戴斌祥(1962-)，男，博士，副教授.

较定理,从而得到了方程(1)的更广泛的一类振动准则.

1 $P(t)\equiv 1$ 时方程(1)的振动性

首先建立几个引理

引理 1[4] 设 $P(t)\equiv 1$,则方程(1)存在非振动解当且仅当微分不等式

$$[x(t)-x(t-\tau)]'+Q(t)\prod_{i=1}^{n}|x(t-\delta_i)|^{\alpha_i}\operatorname{sign}x(t-\delta_i)\leqslant 0 \tag{6}$$

存在最终正解.

引理 2[3] 若不等式(6)存在最终正解,令

$$y(t)=x(t)-x(x-\tau), \tag{7}$$

则最终有 $y(t)>0$.

引理 3 (6)存在最终正解当且仅当常微分不等式

$$z''(t)+\frac{1}{\tau}Q(t)z(t)\leqslant 0 \tag{8}$$

亦存在最终正解.

证明 设(6)存在最终正解 $x(t)$,令 $y(t)$ 如(7)所定义,则由引理 2 知存在 $t_1>0$,使当 $t>t_1$ 时,$y'(t)\leqslant 0$,$y(t)>0$,即 $x(t)>x(t-\tau)$. 从而存在 $t_2>t_1$ 及 $M>0$,使 $x(t)\geqslant M(t\geqslant t_2-\tau)$. 令 $\delta=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\delta_i\}$,$N=[\frac{t-t_2}{\tau}+1]$,则由 $y(t)$ 单调递减及 $x(t-N\tau)\geqslant M$,有

$$\begin{aligned}x(t)&=y(t)+x(t-\tau)=\sum_{i=0}^{N-1}y(t-i\tau)+x(t-N\tau)\\&\geqslant\sum_{i=0}^{N-1}\frac{1}{\tau}\int_{t-i\tau}^{t-(i-1)\tau}y(s)\mathrm{d}s+M\\&\geqslant\frac{1}{\tau}\int_{t_2+\tau}^{t}y(s)\mathrm{d}s+M\geqslant\frac{1}{\tau}\int_{t_2+\tau+\delta}^{t+\delta}y(s)\mathrm{d}s+M,t\geqslant t_2+\tau.\end{aligned}$$

记 $t_3=t_2+\tau+\delta$,则当 $t\geqslant t_3$ 时有

$$x(t-\delta_i)\geqslant\frac{1}{\tau}\int_{t_3}^{t-\delta_i+\delta}y(s)\mathrm{d}s+M\geqslant\frac{1}{\tau}\int_{t_3}^{t}y(s)\mathrm{d}s+M,i=1,2,\cdots,n.$$

代入(6)中得 $y'(t)+\frac{1}{\tau}Q(t)(\int_{t_3}^{t}y(s)\mathrm{d}s+\tau M)\leqslant 0,t\geqslant t_3$. 令 $z(t)=\int_{t_3}^{t}y(s)\mathrm{d}s+\tau M$,则最终有 $z(t)>0,z'(t)>0$,且 $z''(t)+\frac{1}{\tau}Q(t)z(t)\leqslant 0,t\geqslant t_3$. 意味着 $Z(t)$ 是(8)的一个最终正解.

反之,若(8)存在最终正解 $z(t)$,则易证存在 $t_1\geqslant t_0$,使 $t\geqslant t_1$ 时 $z''(t)\leqslant 0,z'(t)>0,z(t)>0$. 令 $u(t)=z'(t)$,则 $u(t)>0,u'(t)\leqslant 0\ (t\geqslant t_1)$. 且 $z(t)=\int_{t_1}^{t}u(s)\mathrm{d}s+z(t_1)$,将此代入(8)中并注意到 $\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i=1$,有

$$u'(t)+Q(t)\prod_{i=1}^{n}[\frac{1}{\tau}\int_{t_1}^{t}u(s)\mathrm{d}s+\frac{1}{\tau}z(t_1)]^{\alpha_i}\leqslant 0,t\geqslant t_1. \tag{9}$$

令 $N_i=[\frac{t-t_1-\delta_i}{\tau}]$,注意到 $u(t)$ 单调递减,则有

$$\sum_{j=0}^{N_i-1}u(t-\delta_i-j\tau)\leqslant\sum_{j=1}^{N_i-1}\frac{1}{\tau}\int_{t-\delta_i-(j+1)\tau}^{t-\delta_i-j\tau}u(s)\mathrm{d}s\leqslant\frac{1}{\tau}\int_{t_1}^{t}u(s)\mathrm{d}s,$$

将此代人(9)式，即得

$$u'(t)+Q(t)\prod_{i=1}^{n}\Big[\sum_{j=0}^{N_i-1}u(t-\delta_i-j\tau)+\frac{1}{\tau}z(t_1)\Big]^{\alpha_i}\leqslant 0,t\geqslant t_1. \tag{10}$$

令 $x(t)=\begin{cases}\frac{1}{\tau}z(t_1),t_1\leqslant t\leqslant t_1+\tau;\\ x(t-\tau)+u(t),t_1+j\tau<t\leqslant t_1+(j+1)\tau,\end{cases}$ $(j=1,2,\cdots)$，则 $x(t)>0,(t\geqslant t_1)$，且 $u(t)=x(t)-x(t-\tau),t\geqslant t_1+\tau$. 于是

$$\sum_{j=0}^{N_i-1}u(t-\delta_i-j\tau)=\sum_{j=0}^{N_i-1}[x(t-\delta_i-j\tau)-x(t-\delta_i-(j+1)\tau)]$$

$$=x(t-\delta_i)-\frac{1}{\tau}u(t_1),t\geqslant t_2\overset{\triangle}{=}t_1+\tau+\delta.$$

代人(10)式，得 $[x(t)-x(t-\tau)]'+Q(t)\prod_{i=1}^{n}(x(t-\delta_i))^{\alpha_i}\leqslant 0,t\geqslant t_2$. 这意味着 $x(t)$是(6)的一个最终正解.

引理 4 (8)存在最终正解当且仅当

$$v'(t)+v^2(t)+\frac{1}{\tau}Q(t)\leqslant 0 \tag{11}$$

存在最终正解.

证明 若(8)存在最终正解 $z(t)$，令 $v(t)=\frac{z'(t)}{z(t)}$，则易知 $v(t)$是(11)的一个最终正解.

反之，若(11)有最终正解 $v(t)$，则只须令 $z(t)=e^{\int_{t_1}^{t}v(s)\mathrm{d}s}$，易知 $z(t)$是(8)的一个最终正解.

引理 5 若(11)存在最终正解，则对任一函数 $\psi\in C([t_0,\infty),[-1,1])$，有

$$\int_{t_0}^{\infty}(1-\psi^2(t))\frac{1}{\tau^2}\Big(\int_t^{\infty}Q(s)\mathrm{d}s\Big)^2\exp\Big\{\frac{2}{\tau}(1+\psi(s))\int_s^{\infty}Q(u)\mathrm{d}u\Big\}\mathrm{d}t<\infty. \tag{12}$$

证明 设 $v(t)$是(11)的一个最终正解，不妨设当 $t\geqslant t_0$ 时 $v(t)>0$. 对(11)两边从 $t(\geqslant t_0)$到∞积分，得 $v(t)\geqslant\int_t^{\infty}v^2(s)\mathrm{d}s+\frac{1}{\tau}\int_t^{\infty}Q(s)\mathrm{d}s,t\geqslant t_0$. 令 $\omega(t)=\int_t^{\infty}v^2(s)\mathrm{d}s$，则

$$0=\omega'(t)+v^2(t)\geqslant\omega'(t)+\frac{2}{\tau}\Big(\int_t^{\infty}Q(s)\mathrm{d}s\Big)\omega(t)+\omega^2(t)+\frac{1}{\tau^2}\Big(\int_t^{\infty}Q(s)\mathrm{d}s\Big)^2,$$

从而对任一函数 $\psi\in C([t_0,\infty),[-1,1])$，由平均值不等式有

$$\omega'(t)+2(1+\psi(t))\frac{1}{\tau}\Big(\int_t^{\infty}Q(s)\mathrm{d}s\Big)\cdot\omega(t)+(1-\psi^2(t))\Big[\frac{1}{\tau}\int_t^{\infty}Q(s)\mathrm{d}s\Big]^2$$

$$\leqslant\omega'(t)+\frac{2}{\tau}\Big(\int_t^{\infty}Q(s)\mathrm{d}s\Big)\omega(t)+\omega^2(t)+\Big[\frac{\psi(t)}{\tau}\int_t^{\infty}Q(s)\mathrm{d}s\Big]^2+$$

$$(1-\psi^2(t))\Big[\frac{1}{\tau}\int_t^{\infty}Q(s)\mathrm{d}s\Big]^2\leqslant 0,\quad t\geqslant t_0.$$

由此推出

$$\Big[\omega(t)\exp\Big\{\frac{2}{\tau}\int_{t_0}^{t}(1+\psi(s))\int_s^{\infty}Q(u)\mathrm{d}u\Big\}\Big]'+$$

$$(1-\psi^2(t))\frac{1}{\tau^2}\left(\int_t^{\infty}Q(s)\mathrm{d}s\right)^2\exp\left\{\frac{2}{\tau}\int_{t_0}^{t}(1+\psi(s))\int_s^{\infty}Q(u)\mathrm{d}u\right\}\leqslant 0.$$

上式两边从 t_0 到 t 积分，得

$$\omega(t)\exp\left\{\frac{2}{\tau}\int_{t_0}^{t}(1+\psi(s))\int_s^{\infty}Q(u)\mathrm{d}u\right\}+$$

$$\int_{t_0}^{t}(1-\psi(t))\frac{1}{\tau^2}\left(\int_t^{\infty}Q(s)\mathrm{d}s\right)^2\exp\left\{\frac{2}{\tau}\int_{t_0}^{t}(1+\psi(s))\int_s^{\infty}Q(u)\mathrm{d}u\right\}\mathrm{d}t\leqslant\omega(t_0).$$

再令 $t\to\infty$，并注意 $\omega(t)>0$，即可推得(12)式成立.

利用引理 1—5，便有下面的：

定理 1 设 $P(t)\equiv 1$，且条件(2)满足，若存在某个函数 $\psi(t)\in[-1,1]$，使得

$$\int_{t_0}^{\infty}(1-\psi^2(t))\frac{1}{\tau^2}\left(\int_t^{\infty}Q(s)\mathrm{d}s\right)^2\exp\left\{\frac{2}{\tau}\int_{t_0}^{t}(1+\psi(s))\int_s^{\infty}Q(u)\mathrm{d}u\right\}\mathrm{d}t=\infty. \tag{13}$$

则方程(1)的所有解振动.

注 1 定理 1 中条件(13)给出了方程(1)当 $P(t)\equiv 1$ 时所有解振动的一簇充分条件，对 $\psi(t)$ 的不同选取，可得到不同的振动判别准则.

特别地，在定理 1 中取 $\psi(t)=\frac{2\tau}{\tau_1}-1$ 有：

推论 设 $P(t)\equiv 1$，且条件(2) 满足，若存在 $\tau_1>\tau$，使 $\int_t^{\infty}Q(s)\mathrm{d}s\geqslant\frac{\tau_1}{4t}$，则方程(1) 的所有解振动.

例 考虑方程

$$[x(t)-x(t-\tau)]'+t^{-\alpha}x(t-\delta)=0. \tag{14}$$

这里，$\tau>0,\delta\geqslant 0,\alpha\geqslant 2,t\geqslant 1$.

由文[3] 知当 $\alpha<2$ 时方程(14) 的所有解振动.

当 $\alpha=2,\tau<4$ 时，易验证推论中的条件满足，从而方程(14) 的所有解振动.

注 2 文[3] 中的条件(5) 只能给出方程(14) 当 $\alpha<2$ 或 $\alpha=2$ 且 $\tau\leqslant 1+\sqrt{2}$ 时所有解振动的结论，对于 $\alpha=2$ 且 $1+\sqrt{2}<\tau<4$ 的情形不能给予任何回答，因此，结论是文[3] 中相应结论的改进.

2 $P(t)\neq 1$ 时方程(1) 的振动性

引理 6[3] 设条件(2) 满足，且存在 $t^*\geqslant t_0$，使 $P(t^*+i\tau)\leqslant 1,i=0,1,\cdots$. 还假设 $Q(t)$ 在任何半无穷区间 $(T,\infty),T\geqslant t_0$ 上不恒等于 0，若 $x(t)$ 是不等式

$$[x(t)-P(t)x(t-\tau)]'+Q(t)\prod_{i=1}^{n}|x(t-\delta_i)|^{\alpha_i}\mathrm{sign}x(t-\delta_i)\leqslant 0 \tag{15}$$

的一个最终正解，$y(t)=x(t)-P(t)x(t-\tau)$，则最终有 $y(t)>0$.

引理 7 设(2)及(13)满足且 $P(t)\geqslant 1,t\geqslant t_0$，若 $x(t)$是(15)的一个最终正解，$y(t)$如引理 6 中所定义，则最终有 $y(t)<0$.

证明 若不然，则最终有 $y(t)>0$. 由 $x(t)=y(t)+P(t)x(t-\tau)\geqslant y(t)+x(t-\tau)$，仿引理 3 的证明可知(8)存在最终正解，再由引理 4 及引理 5 即得出与条件(13)的矛盾结论.

利用引理 6 和引理 7,仿文[3]的证明可得到下面的结论:

定理 2 设(2)及(13)满足且存在 $t^* \geqslant t_0$,使得 $P(t^*+i\tau)\leqslant 1 \quad (i=0,1,\cdots)$,则

$$Q(t)\prod_{i=1}^{n}P^{a_i}(t-\delta_i)\geqslant Q(t-\tau),\quad t\geqslant t_0+\rho,$$

意味着方程(1)的所有解振动,这里 $\rho=\max\{\tau,\delta\}$.

定理 3 设(2)及(13)满足,且 $P(t)\geqslant 1, t\geqslant t_0$,则 $Q(t)\prod_{i=1}^{n}P^{a_i}(t-\delta_i)\leqslant Q(t-\tau), t\geqslant t_0+\rho$,意味着方程(1)的所有解振动.

定理 4 设(2)及(13)满足,且 $P(t)\geqslant 1, t\geqslant t_0$,此外,还假设存在 $t^*\geqslant t_0$,使 $P(t^*+i\tau)\leqslant 1$, $i=0,1,\cdots$,则方程(1)的所有解振动.

例 2 考虑中立型方程 $[x(t)-(2-\sin 2t)x(t-\pi)]'+t^{-2}x^{\frac{1}{3}}(t)x^{\frac{2}{3}}(t-1)=0$. 取 $t^*=\frac{\pi}{4}$,易知 $P(t^*+i\tau)=1, i=0,1,\cdots$,且满足定理 4 的所有条件,故方程的所有解振动.

参考文献:

[1] QIAN C X and LADAS G. *Oscillations of neutral differential equations with variable coefficients* [J]. Appl. Anal., 1989, **32**: 215—228.

[2] YU J S, WANG Z C and QIAN C X. *Oscillation of neutral delay differential equations* [J]. Bull. Austral. Math. Soc., 1992, **45**: 195—200.

[3] SHEN J H and WANG Z C. *Oscillation and nonoscillation for a class of nonlinear neutral differential equations* [J]. Diff. Equ and Dyn. Sys., 1994, **2**(4): 347—360.

[4] CHEN M P, YU J S and HUANG L H. *Oscillations of first order neutral differential equations with variable coefficients* [J]. J. Math. Anal. Appl., 1994, **185**: 288—301.

[5] 戴斌祥,钱祥征. 具有“积分小”系数的一阶非线性中立型微分方程的振动性 [J]. 益阳师专学报, 1997, **14**(6): 13—17.

Oscillation of First Order Nonlinear Neutral Differential Equations with "Integrally Small" Coefficients

DAI Bin-xiang, QIAN Xiang-zheng

Dept. of Appl. Math., Hunan Univ., Changsha 410082)

Abstract: Using some technique, we obtain several new sufficient conditions for the oscillation of all solutions of the neutral equation differential $[x(t)-P(t)x(t-\tau)]'+Q(t)\prod_{i=1}^{n}|x(t-\delta_i)|^{a_i}\operatorname{sign}x(t-\delta_i)=0$. Our results extend and improve some of the known results in the literature.

Key words: Neutral differential equation; "Integrally small" coefficient; Oscillation.