关于$(X\oplus Y)_1$的凸性*

方 习 年

(安徽机电学院，芜湖 241000)

摘 要：本文给出 k-严格凸、(局部)k—一致圆定义的几个等价形式.利用等价形式，讨论了$(X\oplus X)_1$ 的 k-严格凸及(局部)k—一致圆性.

关键词：k-严格凸；(局部)k—一致圆；仿射张.

分类号：AMS(1991) 46B20/CLC O177.2

文献标识码：A　　**文章编号**：1000-341X(2000)02-0261-05

文[1,2,3]中讨论了 k-严格凸及 k-UR 在 $l^p(X_i)(p>1)$的有限、无限提升问题. 本文给出 k-严格凸、$(L)k$-UR 定义的几个等价形式，利用等价形式，我们讨论了$(X\oplus Y)_1$ 的 k-严格凸及 k-UR 性.

设 X 为 Banach 空间，以 $B(X)$，$S(X)$及 X^*表示 X 的单位球、单位球面及共轭空间．当 $x_0,x_1,\cdots,x_k\in X$ 时，记

$$B(x_0,\cdots,x_k)=\sup\left\{\begin{vmatrix} f_0(x_0) & \cdots & f_0(x_k)\\ \cdots & \cdots & \cdots \\ f_k(x_0) & \cdots & f_k(x_k)\end{vmatrix};f_i\in B(X^*)\quad i=0,1,\cdots,k\right\}.$$

将上述行列式中第一行换成$(1,\cdots,1)$所得形式记为 $A(x_0,\cdots,x_k)$；将第一行换成$(\|x_0\|,\cdots,\|x_k\|)$所得形式记为 $C(x_0,\cdots,x_k)$.

定义 1[4] 称 Banach 空间 X 为 k-严格凸的，若对 X 中任意 $k+1$ 个元 $x_0,x_1,\cdots,x_k$，当 $\left\|\sum_{i=0}^k x_i\right\|=\sum_{i=0}^k\|x_i\|$时，则 $x_0,x_1,\cdots,x_k$ 是线性相关的．

当$\left\|\sum_{i=0}^k x_i\right\|=\sum_{i=0}^k\|x_i\|$时，如何判断 $x_0,x_1,\cdots,x_k$ 的线性相关性呢？我们给出如下定理

定理 1 设 X 为 Banach 空间，$x_0,\cdots,x_k\in X$ 且$\left\|\sum_{i=0}^k x_i\right\|=\sum_{i=0}^k\|x_i\|$. 则 $x_0,\cdots,x_k$ 线性相关的充要条件为 $B(x_0,\cdots,x_k)=0$.

证明 由行列式性质不难看出必要性成立．

充分性 若 $x_0,\cdots,x_k$ 中有一零元，则 $x_0,\cdots,x_k$ 相关．若 $x_0,\cdots,x_k$ 全不为零．由 Hahn-Banach 定理知，存在 $f\in S(X^*)$ 使 $f(\sum_{i=0}^k x_i)=\left\|\sum_{i=0}^k x_i\right\|$. 因 $f(x_i)\leqslant\|x_i\|$，故由

* 收稿日期：1997-04-15

作者简介：方习年(1960-)，男，安徽机电学院副教授.

$$0 \leqslant \sum_{i=0}^{k}(\|x_i\| - f(x_i)) = \sum_{i=0}^{k}\|x_i\| - \left\|\sum_{i=0}^{k}x_i\right\| = 0$$

得 $f(x_i) = \|x_i\|$，即 $f(x_i/\|x_i\|) = 1(0 \leqslant i \leqslant k)$，进而有

$$\begin{aligned}
0 &= B(x_0,x_1,\cdots,x_k) = \|x_0\|\|x_1\|\cdots\|x_k\|B(x_0/\|x_0\|,x_1/\|x_1\|,\cdots,x_k/\|x_k\|) \\
&\geqslant \|x_0\|\|x_1\|\cdots\|x_k\|A(x_0/\|x_0\|,x_1/\|x_1\|,\cdots,x_k/\|x_k\|) \\
&\overset{[6]}{\geqslant} \|x_0\|\cdots\|x_k\|d(x_1/\|x_1\|,[x_0/\|x_0\|])\cdots d(x_k/\|x_k\|,[x_0/\|x_0\|,\cdots,x_{k-1}/\|x_{k-1}\|]) \\
&\geqslant 0.
\end{aligned}$$

由上式知：$d(x_1/\|x_1\|,[x_0/\|x_0\|]),\cdots,d(x_k/\|x_k\|,[x_0/\|x_0\|,\cdots,x_{k-1}/\|x_{k-1}\|])$之中必有一个为零，从而 $x_0,x_1,\cdots,x_k$ 线性相关(其中$[y_1,\cdots,y_l]$表示 $y_1,\cdots,y_l$ 的仿射张).

由定理 1，下述定理 2 显然成立.

定理 2 X 为 k-严格凸的当且仅当 $x_0,x_1,\cdots,x_k \in X$ 且$\left\|\sum_{i=0}^{k}x_i\right\| = \sum_{i=0}^{k}\|x_i\|$时，有

$$B(x_0,x_1,\cdots,x_k) = 0.$$

定理 3 设 X,Y 分别是 k_1、k_2-严格凸的，则$(X\oplus Y)_1$ 是(k_1+k_2)—严格凸的，其中$(X\oplus Y)_1 = \{(x,y);x\in X,y\in Y,\|(x,y)\| = \|x\|+\|y\|\}$.

证 明 设 $(x_0,y_0),\cdots,(x_{k_1+k_2},y_{k_1+k_2}) \in (X\oplus Y)_1$ 且 $\left\|\sum_{i=0}^{k_1+k_2}(x_i,y_i)\right\| = \sum_{i=0}^{k_1+k_2}\|(x_i,y_i)\|$，则$\left\|\sum_{i=0}^{k_1+k_2}x_i\right\| = \sum_{i=0}^{k_1+k_2}\|x_i\|$及$\left\|\sum_{i=0}^{k_1+k_2}y_i\right\| = \sum_{i=0}^{k_1+k_2}\|y_i\|$. 从而由三角不等式得：$\left\|\sum_{i=0}^{k_1}x_{n_i}\right\| = \sum_{i=0}^{k_1}\|x_{n_i}\|(\forall\, n_0,\cdots,n_{k_1} \in \{0,1,\cdots,k_1+k_2\})$；$\left\|\sum_{j=0}^{k_2}y_{m_j}\right\| = \sum_{j=0}^{k_2}\|y_{m_j}\|(\forall\, m_0,\cdots,m_{k_2} \in \{0,1,\cdots,k_1+k_2\})$. 由于 X,Y 分别为 k_1,k_2—严格凸的，所以由定理 2 知：

$$B(x_{n_0},\cdots,x_{n_{k_1}})=0 \quad (\forall\, n_0,\cdots,n_{k_1}\in\{0,1,\cdots,k_1+k_2\});$$

$$B(y_{m_0},\cdots,y_{m_{k_2}})=0 \quad (\forall\, m_0,\cdots,m_{k_2}\in\{0,1,\cdots,k_1+k_2\});$$

$$B((x_0,y_0),\cdots,(x_{k_1+k_2},y_{k_1+k_2}))$$

$$=\sup\left\{\left|\begin{matrix} f_0(x_0)+g_0(y_0) & \cdots & f_0(x_{k_1+k_2})+g_0(y_{k_1+k_2}) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{k_1+k_2}(x_0)+g_{k_1+k_2}(y_0) & \cdots & f_{k_1+k_2}(x_{k_1+k_2})+g_{k_1+k_2}(y_{k_1+k_2}) \end{matrix}\right| \begin{matrix} f_i\in B(X^*) \\ ;g_i\in B(Y^*) \\ i=0,\cdots,k_1+k_2 \end{matrix}\right\}.$$

将上式中行列式分解成 $2^{k_1+k_2+1}$个行列式之和，和中每个行列式至少有 k_1+1 列形如$(f_0(x_i),\cdots,f_{k_1+k_2}(x_i))^T$($T$ 为转置)，这种列称之为 x_i 所在的列，这样的行列式称之为 X 型的；或至少有 k_2+1 列形如$(g_0(y_j),\cdots,g_{k_1+k_2}(y_j))^T$ 的 Y 型行列式. 将 X 型行列式按某 $x_{n_0},\cdots,x_{n_{k_1}}$所在的列用 Laplace 定理展开. 其上确界不超过

$$C_{k_1+k_1+1}^{k_1+1}B(x_{n_0},\cdots,x_{n_{k_1}})(k_2)! \leqslant (k_1+k_2+1)!\ B(x_{n_0},\cdots,x_{n_{k_1}}).$$

对 Y 型行列式作同样处理. 于是有

$$0 \leqslant B((x_0,y_0),\cdots,(x_{k_1+k_2},y_{k_1+k_2})) \leqslant \sum_X B(x_{n_0},\cdots,x_{n_{k1}})(k_1+k_2+1)!+$$

$$\sum_Y B(y_{m_0},\cdots,y_{m_{k_2}})(k_1+k_2+1)! = 0 (\textstyle\sum_X \text{表示对 } X \text{ 型行列式取和}).$$

由上式及定理1知$(x_0,y_0),\cdots,(x_{k_1+k_2},y_{k_1+k_2})$线性相关，进而由定理2知，$(X\oplus Y)_1$是$(k_1+k_2)$-严格凸的.

注 文[1]的主要结果定理5的证明有些不妥，作者在[7]中给出一个补证. 类似于定理3可

直接证明[1]中定理5.

定义2[5] 称 Banach 空间 X 是 Lk-UR,若对$\forall\ \varepsilon>0,\forall\ x_0\in S(X),\exists\ \delta=\delta(\varepsilon,x_0)>0$,当 $x_1,\cdots,x_k\in B(X)$且 $k+1-\left\|\sum_{i=0}^k x_i\right\|<\delta$ 时,有 $A(x_0,x_1,\cdots,x_k)<\varepsilon$.

定理4 Banach空间 X 是 $Lk-UR$ 充要条件是对 $\forall\ \varepsilon>0,\forall\ x_0\in S(X),\exists\ \delta=\delta(x_0,\varepsilon)>0$,当 $x_1,\cdots,x_k\in S(X)$ 且 $k+1-\left\|\sum_{i=0}^k x_i\right\|<\delta$ 时,有 $B(x_0,x_1,\cdots,x_k)<\varepsilon$.

证明 必要性,若$\exists\ x_0\in S(X)$ 及 $\varepsilon_0>0$ 使得对 $\forall\ n\in \mathbf{N}$ 有 $x_1^n,\cdots,x_k^n\in S(X)$ 满足 $k+1-\left\|\sum_{i=0}^k x_i^n\right\|<\frac{1}{n}(x_0^n=x_0)$. 但 $B(x_0^n,x_1^n,\cdots,x_k^n)\geqslant\varepsilon_0(\forall\ n\in\mathbf{N})$. 那末由 Lk-UR 定义知, $A(x_0^n,x_1^n,\cdots,x_k^n)\to 0$. 取 $y_{i+1}^n\in[x_0^n,\cdots,x_i^n]$ 且满足 $\|x_{i+1}^n-y_{i+1}^n\|=d(x_{i+1}^n,[x_0^n,\cdots,x_i^n])$(因为 $\dim[x_0^n,\cdots,x_i^n]\leqslant i+1$,所以 y_{i+1}^n 存在). 由于 y_{i+1}^n 是$[x_0^n,\cdots,x_i^n]$的一个线性组合($i=0,1,\cdots,k-1$). 根据行列式定义及性质得:

$$\begin{aligned}\varepsilon_0&\leqslant B(x_0^n,x_1^n,\cdots,x_k^n)\leqslant B(x_0^n,x_1^n-y_1^n,\cdots,x_k^n-y_k^n)\\&\leqslant(k+1)!\,d(x_1^n,[x_0^n])\cdots d(x_k^n,[x_0^n,\cdots,x_{k-1}^n])^{[6]}\\&\leqslant(k+1)!\,A(x_0^n,\cdots,x_k^n)\to 0,\end{aligned}$$

矛盾!

充分性 若$\exists\ x_0\in S(X)$ 及 $\varepsilon_0>0$,使得对 $\forall\ n\in\mathbf{N}$ 有 $x_1^n,\cdots,x_k^n\in S(X)$ 满足 $k+1-\left\|\sum_{i=0}^k x_i^n\right\|\leqslant\frac{1}{n}(x_0^n=x_0)$. 但 $A(x_0^n,x_1^n,\cdots,x_k^n)\geqslant\varepsilon_0$. 据充分性假设,有 $B(x_0^n,x_1^n,\cdots,x_k^n)\to 0$. 取 $f_n\in S(X^*)$ 使 $f_n(\sum_{i=0}^k x_i^n)=\left\|\sum_{i=0}^k x_i^n\right\|$, 则

$$0\leqslant\sum_{i=0}^k(1-f_n(x_i^n))\leqslant k+1-\left\|\sum_{i=0}^k x_i^n\right\|\leqslant\frac{1}{n}\to 0.$$

故 $\alpha_i^{(n)}\overset{\triangle}{=}1-f_n(x_i^n)\to 0(i=0,1,\cdots,k)$. 从而有下面的矛盾:

$$\begin{aligned}&\varepsilon_0\leqslant A(x_0^n,x_1^n,\cdots,x_k^n)\\&=\sup\left\{\begin{vmatrix}1-\alpha_0^{(n)}+\alpha_0^{(n)}&\cdots&1-\alpha_k^{(n)}+\alpha_k^{(n)}\\f_1(x_0^n)&\cdots&f_1(x_k^n)\\\cdots&\cdots&\cdots\\f_k(x_0^n)&\cdots&f_k(x_k^n)\end{vmatrix};f_i\in B(X^*)(i=1,\cdots,k)\right\}\\&\leqslant B(x_0^n,x_1^n,\cdots,x_k^n)+\alpha_0^{(n)}k!+\cdots+\alpha_k^{(n)}k!\to 0(n\to\infty)\end{aligned}$$

定理5 X 为 Lk-UR 当且仅当对 $\forall\ \varepsilon>0$ 及 $x_0\in B(X),\exists\ \delta=\delta(x_0,\varepsilon)>0$,当 $x_1,\cdots,x_k\in B(X)$ 且 $\sum_{i=0}^k\|x_i\|-\left\|\sum_{i=0}^k x_i\right\|<\delta$ 时,有 $B(x_0,x_1,\cdots,x_k)<\varepsilon$.

证明 由定理4知,充分性成立.

必要性 若$\exists\ x_0\in B(X)$ 及 $\varepsilon_0>0$ 使得对 $\forall\ n\in N$,有 $x_1^n,\cdots,x_k^n\in B(X)$ 满足 $\sum_{i=0}^k\|x_i^n\|-\left\|\sum_{i=0}^k x_i^n\right\|<\frac{1}{n}(x_0^n=x_0)$. 然而 $B(x_0^n,x_1^n,\cdots,x_k^n)\geqslant\varepsilon_0$. 这样,便$\exists\ a>0$ 使得对一切 n 有 $\min_i\|x_i^n\|\geqslant a$. 取 $f_n\in S(X^*)$ 使 $f_n(\sum_{i=0}^k x_i^n)=\left\|\sum_{i=0}^k x_i^n\right\|$. 故 $0\leqslant\sum_{i=0}^k(\|x_i^n\|-f_n(x_i^n))\leqslant\sum_{i=0}^k\|x_i^n\|-\left\|\sum_{i=0}^k x_i^n\right\|<\frac{1}{n}\to 0$. 从而 $0\leqslant\|x_i^n\|-f_n(x_i^n)<\frac{1}{n}\to 0$ 得 $f_n(x_i^n/\|x_i^n\|)\to 1$. 进而 $\|x_0^n/\|x_0^n\|+\cdots+x_k^n/\|x_k^n\|\|\to k+1$. 由定理4知 $B(x_0^n/\|x_0^n\|,\cdots,$

$x_k^n/\|x_k^n\|) \to 0$. 于是 $\varepsilon_0 \leqslant B(x_0^n,\cdots,x_k^n) = \|x_0^n\|\cdots\|x_k^n\|B(x_0^n/\|x_0^n\|,\cdots,x_k^n/\|x_k^n\|) \to 0$,矛盾.

定理 6 X 为 Lk-UR 当且仅当对 $\forall\ \varepsilon > 0$ 及 $x_0 \in B(X)$,$\exists\ \delta = \delta(x_0,\varepsilon) > 0$,当 $x_1,\cdots,x_k \in B(X)$ 且 $\sum_{i=0}^k \|x_i\| - \left\|\sum_{i=0}^k x_i\right\| < \delta$ 时,有 $C(x_0,x_1,\cdots,x_k) < \varepsilon$.

证明 当 $\|x_0\| = \cdots = \|x_k\| = 1$ 时,$A(x_0,x_1,\cdots,x_k) = C(x_0,x_1,\cdots,x_k)$. 由充分性假设及 Lk-UR 定义不难看出充分性成立.

必要性 若存在 $\varepsilon_0 > 0$ 及 $x_0 \in B(X)$ 使得对 $\forall\ n \in \mathbf{N}$ 有 $x_1^n,\cdots,x_k^n \in B(X)$ 且 $\sum_{i=0}^k \|x_i^n\| - \left\|\sum_{i=0}^k x_i^n\right\| < \frac{1}{n}(x_0^n = x_0)$,但 $C(x_0^n,x_1^n,\cdots,x_k^n) \geqslant \varepsilon_0$. 那么 $\exists\ a > 0$,对一切 $n \in N$ 有 $\min_i \|x_i^n\| \geqslant a$. 与定理 5 证明同理有 $\|x_0^n/\|x_0^n\| + \cdots + x_k^n/\|x_k^n\|\| \to k+1$. 故 $A(x_0^n/\|x_0^n\|,\cdots,x_k^n/\|x_k^n\|) \to 0$. 于是有如下矛盾:

$$\varepsilon_0 \leqslant C(x_0^n,\cdots,x_k^n) = \|x_0^n\|\cdots\|x_k^n\|C(x_0^n/\|x_0^n\|,\cdots,x_k^n/\|x_k^n\|)$$
$$= \|x_0^n\|\cdots\|x_k^n\|A(x_0^n/\|x_0^n\|,\cdots,x_k^n/\|x_k^n\|) \to 0.$$

与 Lk-UR 的情形同理可证如下定理.

定理 7 X 为 k-UR[5] 当且仅当对 $\forall\ \varepsilon > 0$,$\exists\ \delta > 0$,当 $x_0,x_1,\cdots,x_k \in B(X)$ 且 $\sum_{i=0}^k \|x_i\| - \left\|\sum_{i=0}^k x_i\right\| < \delta$ 时,有 $B(x_0,x_1,\cdots,x_k) < \varepsilon$(或 $C(x_0,x_1,\cdots,x_k) < \varepsilon$).

定理 8 设 X,Y 分别是 k_1,k_2-UR,则 $(X \oplus Y))_1$ 是 (k_1+k_2)-UR.

证明 对 $\forall\ \varepsilon > 0$,令 $\varepsilon_1 = \varepsilon/(2k+1)!2^{(2k+1)}(k = \max(k_1,k_2))$. 由于 X,Y 分别是 k_1,k_2-UR,由定理 7 知,$\exists\ \delta_X(\varepsilon_1) > 0$、$\delta_Y(\varepsilon_1) > 0$. 令 $\delta = \min(\delta_X(\varepsilon_1),\delta_Y(\varepsilon_1))$. 设 $(x_0,y_0),\cdots,(x_{k_1+k_2},y_{k_1+k_2}) \in B((X \oplus Y)_1)$ 满足 $\sum_{i=0}^{k_1+k_2} \|(x_i,y_i)\| - \left\|\sum_{i=0}^{k_1+k_2}(x_i,y_i)\right\| < \delta$. 由此得:

$$\sum_{i=0}^{k_1} \|x_{n_i}\| - \left\|\sum_{i=0}^{k_1} x_{n_i}\right\| < \delta(\forall\ n_0,\cdots,n_k \in \{0,1,\cdots,k_1+k_2\}),$$

$$\sum_{j=0}^{k_2} \|y_{m_j}\| - \left\|\sum_{j=0}^{k_2} y_{m_j}\right\| < \delta(\forall\ m_0,\cdots,m_{k_2} \in \{0,1,\cdots,k_1+k_2\}).$$

从而由定理7得:

$$B(x_{n_0},\cdots,x_{n_{k_1}}) < \varepsilon_1(\forall\ n_0,\cdots,n_{k_1} \in \{0,1,\cdots,k_1+k_2\}),$$

$$B(y_{m_0},\cdots,y_{m_{k_2}}) < \varepsilon_1(\forall\ m_0,\cdots,m_{k_2} \in \{0,1,\cdots,k_1+k_2\}).$$

由定理3的证明可得:

$$B((x_0,y_0),\cdots,(x_{k_1+k_2},y_{k_1+k_2})) \leqslant \sum\nolimits_X B(x_{n_0},\cdots,x_{n_{k_1}})(2k+1)! +$$
$$\sum\nolimits_Y B(y_{m_0},\cdots,y_{m_{k_2}})(2k+1)! < 2^{(2k+1)} \cdot (2k+1)!\varepsilon_1 \leqslant \varepsilon.$$

故由定理7知:$(X \oplus Y)_1$ 是 (k_1+k_2)-UR.

参考文献:

[1] NAN Chao-xun. *k-strict convexity and k-UR spasces* [J]. J. Math. Res. & Exp., 1992, **12**(4): 505—508.

[2] YU Xin-tai. *On the k-rotundity modulus and k-convexty modulus* [J]. Chinese. Ann. Math., 1990,

11A(2): 212—222.
[3] YU Xin-tai. *Geometic Theory of Banach Spaces* [M]. East China Normal University Publishers, Shanghai, 1986.
[4] SINGER I. *On the set of best approximation of an element in a normed linear space* [J]. Rev. Roum Math Pure Appl., 1960, **5**.
[5] SULLIVAN F. *A generalization of uniformly rotund Banach spaces* [J]. Canad, J. Math., 1979, **31**: 628—636.
[6] BERNAL J and SULLIVAN F. *Multi-dimenional volumes, superreflexivity and normal structure in Banach space* [J]. Illinois J. Math., 1983, **27**: 501—515.
[7] FANG Xi-nian. *A supplementary proof of the 《k-strict convexity and k-UR spaces》* [J]. J. Anhui Normal Univ. (Natur. Sci. Ed.), 1996, **19**(1): 20—22.

On the Convexity of $(X \oplus Y)_1$

FANG Xi-nian
(Anhui Institute of Mechanical and Electrical Engineering, Wuhu 241000)

Abstract: In this paper, we give some suffcient and necessary conditiones for Banach spaces to be k-strictly convex and $(L)k$-UR. By the suffcient and necessary condition, we discuss the k-strict convexity and k-uniform rotundity of $(X \oplus Y)_1$.
Key words: k-strictly convex; (locally)k-uniformly rotund; affinely spaned.