第 20 卷第 2 期　　数 学 研 究 与 评 论　　Vol. 20 No. 2
2000 年 5 月　　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　　May 2000

半代数集的一个计数定理及其应用*

张传林[1]，　于　凯[2]

(1. 暨南大学数学系，广州 510632； 2. 成都气象学院基础科学系，成都 610041)

摘　要：给出半代数集基数的计数原理和不可约紧代数流形上 *Euler* 示性数及亏格的算法.

关键词：半代数集；紧代数流形；亏格.

分类号：AMS(1991) 13P/CLC O241.7

文献标识码：A　　　　**文章编号**：1000-341X(2000)02-0266-05

1　主要结果

记 $\mathbf{R}$ 为实数集，$\mathbf{Z}$ 为整数环，$\mathbf{R}[x_1,x_2,\cdots,x_n]$为实数域 $\mathbf{R}$ 上 n 元多项式环，$\mathbf{Z}[t_{1,0},\cdots,t_{1,m_1},\cdots,t_{r,0},\cdots,t_{r,m_r},x]$为整数环 $\mathbf{Z}$ 上以 $t_{1,0},\cdots,t_{1,m_1},\cdots,t_{r,0},\cdots,t_{r,m_r},x$ 为未定元的多项式环. 用$|A|$表示集合 A 的基数. 用 $A\backslash B$ 表示集合 A 与集合 B 的差集，即 $A\backslash B=\{x\in A\,|\,x\notin B\}$.

定义 1.1　称 n 维空间 $\mathbf{R}^n$ 的一个子集 S 为半代数集，如果在 $\mathbf{R}[x_1,x_2,\cdots,x_n]$中存在有限组多项式 $G_1=\{f_{1,1},\cdots,f_{1,1_1}\},\cdots,Gm=\{f_{m,1},\cdots,f_{m,1_m}\}$及相应的符号列 $u_1=(\varepsilon_{1,1},\cdots,\varepsilon_{1,1_1}),\cdots,u_m=(\varepsilon_{m,1},\cdots,\varepsilon_{m,1_m})$(其中 $\varepsilon_{i,j}\in\{-1,0,1\}$)使得

$$s=\bigcup_{i=1}^{m}\bigcap_{j=l_i}^{l}\{(\xi_1\cdots,\xi_n)\in\mathbf{R}^n\,|\,\mathrm{sgn}(f_{i,j}(\xi_1\cdots,\xi_n))\}=\varepsilon_{i,j}\},$$

其中 sgn 是符号函数.

引理 1.1　设 $A_1,\cdots,A_k$ 是 k 个有限集，则 $|\bigcup_{i=1}^{k}A_i|=\sum_{r=1}^{k}(-1)^{r-1}(\sum_{1\leqslant j_1\leqslant\cdots\leqslant j_r}|\bigcap_{l=1}^{r}A_{j_l}|)$.

引理 1.2　任意给定整数和非负整数 $m_1,\cdots,m_r$(令 $\gamma=r+\sum_{i=1}^{r}m_i$)及 $\mathbf{Z}[t_{1,0},\cdots,t_{1,m_1},\cdots,t_{r,0},\cdots,t_{r,m_r},x]$中多项式：

$$g_1=t_{1,0}+t_{1,1}x+,\cdots,+t_{1,m_1}x_1^m,\cdots,g_r=t_{r,0}+t_{r,1}x+\cdots+t_{r,m_r}x_r^m$$

及符号列 $u=(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_r)$，其中 $\varepsilon_i\in\{-1,0,1\},i=1,\cdots,r$.

(1)　如果 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_r$ 全不为 0，则在有限步内可求得 $\mathbf{Z}[t_{1,0},\cdots,t_{1,m_1},\cdots,t_{r,0},\cdots,t_{r,m_r}]$中有限组多项式 $H_1=\{h_{1,1},\cdots,h_{1,e_1}\},\cdots,H_s=\{h_{s,1},\cdots,h_{s,e_s}\}$及相应的符号列 $u_1=(\varepsilon_{1,1},\cdots,\varepsilon_{1,e_1}),\cdots,$

* 收稿日期：1997-03-24；修订日期：1999-06-08

基金项目：国务院侨办重点学科基金项目(93A109)

作者简介：张传林(1964-)，四川仪陇人，博士，暨南大学副教授.

$u_s=(\varepsilon_{s,1},\cdots,\varepsilon_{s,e_s})$使得:对任意$(\xi_{1,0},\cdots,\xi_{1,m_1},\cdots,\xi_{r,0},\cdots,\xi_{r,m_r})\in\mathbf{R}^\gamma$.

(i) 只要对某$i\in\{1,2,\cdots,s\}$及一切$j\in\{1,2,\cdots,e_i\}$都成立

$$\operatorname{sgn}(h_{i,j}(\xi_{1,0},\cdots,\xi_{1,m_1},\cdots,\xi_{r,0},\cdots,\xi_{r,m_r}))=\varepsilon_{i,j},$$

则

$$|\{\xi\in\mathbf{R}\,|\operatorname{sgn}(g_1(\xi_{1,0},\cdots,\xi_{1,m_1},\cdots,\xi_{r,0},\cdots,\xi_{r,m_r},\xi))=\varepsilon_1,1=1,\cdots,r\}=\chi.$$

这里χ是连续统基数.

(ii) 若对一切$i\in\{1,\cdots,s\}$都有$j_i\in\{1,2,\cdots,e_i\}$使得$\operatorname{sgn}(h_{i,j_i}(\xi_{1,0},\cdots,\xi_{1,m_1},\cdots,\xi_{r,0},\cdots,\xi_{r,m_r}))\neq\varepsilon_{i,j_i}$,则

$$|\{\xi\in\mathbf{R}\,|\operatorname{sgn}(g_1(\xi_{1,0},\cdots,\xi_{1,m_1},\cdots,\xi_{r,0},\cdots,\xi_{r,m_r},\xi))=\varepsilon_1,1=1,\cdots,r\}|=0.$$

(2) 如果$\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_r$中至少有一个为0,令$m=\min\{m_i|\varepsilon_i=0\}$,$d$是满足$0\leqslant d\leqslant m$的任一整数,则在有限步内可求得$\mathbf{Z}[t_{1,0},\cdots,t_{1,m_1},\cdots,t_{r,0},\cdots,t_{r,m_r}]$中有限组多项式$F_1^{(d)}=\{f_{1,1}{}^{(d)},\cdots,f_{1,c(d,1)}^{(d)}\},\cdots,F_{h(d)}^{(d)}=\{f_{h(d),1}^{(d)},\cdots,f_{h(d),c(d)}^{(d)}\}$及相应符号列$u_1^{(d)}=(\varepsilon_{1,1}^{(d)},\cdots,\varepsilon_{1,c(d,1)}^{(d)}),\cdots,u_{h(d)}^{(d)}=(\varepsilon_{h(d),1}^{(d)},\cdots,\varepsilon_{h(d),c(d)}^{(d)})$使得:对任意$(\xi_{1,0},\cdots,\xi_{1,m_1},\cdots,\xi_{r,0},\cdots,\xi_{r,m_r})\in\mathbf{R}^\gamma$,只要对某个$i\in\{1,2,\cdots,h_d\}$及一切$j\in\{1,2,\cdots,c(d,i)\}$都满足$\operatorname{sgn}(f_{i,j}^{(d)}(\xi_{1,0},\cdots,\xi_{1,m_1},\cdots,\xi_{r,0},\cdots,\xi_{r,m_r}))=\varepsilon_{i,j}^{(d)}$,则

$$|\{\xi\in\mathbf{R}\,|\operatorname{sgn}(g_1(\xi_{1,0},\cdots,\xi_{1,m_1},\cdots,\xi_{r,0},\cdots,\xi_{r,m_r},\xi))=\varepsilon_1,1=1,\cdots,r\}|=d.$$

这是[2]中定理29的直接推论.

引理1.3 实直线上的半代数集的基数是可计算的,或为有限数或为连续统基数χ.

证明 由引理1.1,1.2易得.

定理1 $\mathbf{R}^n$中的半代数集的基数是可计算的,或为有限数或为连续统基数χ.

证明 对n使用数学归纳法.

$n=1$时,由引理1.1,1.2知定理结论成立.

归纳假设$n=k$时,定理结论成立.当$n=k+1$时,由半代数集的定义和引理1.1知道,只需证明当取定$f_1,\cdots,f_r\in\mathbf{R}[x_1,\cdots,x_n]$及符号列$u=(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_r)$时,

$$\left|\bigcap_{i=1}^{r}\{(\xi_1,\cdots,\xi_n)\in\mathbf{R}^n\,|\operatorname{sgn}(f_j(\xi_1,\cdots,\xi_n))=\varepsilon_{i,j}\}\right|$$

有限步可计算.事实上,视$f_1,\cdots,f_r$为$\mathbf{R}[x_1,\cdots,x_{n-1}]$上的多项式,并把$f_1,\cdots,f_r$改写为$x_n$的多项式,即:$f_i=I_{i,0}+I_{i,1}x_n+\cdots+I_{i,m_i}x_n^{m_i}$,$i=1,\cdots,r$.其中$I_{i,j}\in\mathbf{R}[x_1,\cdots,x_{n-1}]$,$j=0,\cdots,m_i$,$i=1,\cdots,r$.

当$\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_r$全不为0时,由引理1.2知,在有限步内可求得$\mathbf{Z}[t_{1,0},\cdots,t_{1,m_1},\cdots,t_{r,0},\cdots,t_{r,m_r}]$上有限组多项式$H_1=\{h_{1,1},\cdots,h_{1,e_1}\},\cdots,H_s=\{h_{s,1},\cdots,h_{s,e_s}\}$及相应的符号列$u_1=(\varepsilon_{1,1},\cdots,\varepsilon_{1,e_1}),\cdots,u_s=(\varepsilon_{s,1},\cdots,\varepsilon_{s,e_s})$使得:对任意$(\xi_{1,0},\cdots,\xi_{1,m_1},\cdots,\xi_{r,0},\cdots,\xi_{r,m_r})\in\mathbf{R}^\gamma$有下列性质:

(i) 只要对某$i\in\{1,\cdots,s\}$及一切$k\in\{1,\cdots,e_i\}$都成立$\operatorname{sgn}(h_{i,j}(\xi_{1,0},\cdots,\xi_{1,m_1},\cdots,\xi_{r,0},\cdots,\xi_{r,m_r}))=\varepsilon_{i,j}$,就有

$$|\{\xi\in\mathbf{R}\,|\operatorname{sgn}(g_1(\xi_{1,0},\cdots,\xi_{1,m_1},\cdots,\xi_{r,0},\cdots,\xi_{r,m_r},\xi))=\varepsilon_1,\quad 1=1,\cdots,r\}|=\chi.$$

(ii) 若对一切$i\in\{1,\cdots,s\}$存在$k_i\in\{1,\cdots,e_i\}$使$\operatorname{sgn}(h_{i,k_i}(\xi_{1,0},\cdots,\xi_{1,m_1},\cdots,\xi_{r,0},\cdots,\xi_{r,m_r}))\neq\varepsilon_{i,k_i}$,则

$|\{\xi\in\mathbf{R}|\operatorname{sgn}(f_1(\xi_{1,0},\cdots,\xi_{1,m_1},\cdots,\xi_{r,0},\cdots,\xi_{r,m_r},\xi))=\epsilon_1,\quad 1=1,\cdots,r\}|=0.$

令 $h'_{i,j}=h_{i,j}(I_{1,0},\cdots,I_{1,m_1},\cdots,I_{r,0},\cdots,I_{r,m_r}),H'_1=\{h'_{1,1},\cdots,h'_{1,e_1}\},\cdots,H'_s=\{h'_{s,1},\cdots,h'_{s,e_s}\}$.
则 $H'_i\subset\mathbf{R}[x_1,\cdots,x_{n-1}]$. 由归纳假设在有限步内可求得 $\mathbf{R}^k$ 中半代数集 $A_k=\bigcup_{i=1}^{s}\bigcap_{j=1}^{e_j}\{(\xi_1,\cdots,\xi_{n-1})\in\mathbf{R}^{n-1}|\operatorname{sgn}(h_{i,j}(\xi_1,\cdots,\xi_{n-1}))=\epsilon_{i,j}\}$的基数$|A_k|$.

如果$|A_k|=0$,则由引理 1.2 有

$$|\{(\xi_1,\cdots,\xi_n)\in\mathbf{R}^n|\operatorname{sgn}(f_i(\xi_1,\cdots,\xi_n))=\epsilon_i,i=1,\cdots,r\}|=0.$$

如果$|A_k|\neq0$,则

$$|\{(\xi_1,\cdots,\xi_n)\in\mathbf{R}^n|\operatorname{sgn}(f_i(\xi_1,\cdots,\xi_n))=\epsilon_i,i=1,\cdots,r\}|=\chi.$$

(3) 当 $\epsilon_1,\cdots,\epsilon_r$至少有一个为 0 时,由引理 1.2 知,对每个满足 $1\leqslant d\leqslant m$ 的整数 d,在有限步内可求得 $\mathbf{Z}[t_{1,0},\cdots,t_{1,m_1},\cdots,t_{r,0},\cdots,t_{r,m_r},x]$中有限组多项式
$F_1^{(d)}=\{f_{1,1}^{(d)},\cdots,f_{1,c(d,1)}^{(d)}\},\cdots,F_{h(d)}^{(d)}=\{f_{h(d),1}^{(d)},\cdots,f_{h(d),c(d)}^{(d)}\}$及相应符号列 $u_1^{(d)}=(\epsilon_{1,1}^{(d)},\cdots,\epsilon_{1,c(d,1)}^{(d)}),\cdots,u_{h(d)}^{(d)}=(\epsilon_{h(d,1),1}^{(d)},\cdots,\epsilon_{h(d),c(d)}^{(d)})$使得:

对任意$(\xi_{1,0},\cdots,\xi_{1,m_1},\cdots,\xi_{r,0},\cdots,\xi_{r,m_r})\in\mathbf{R}^v$,只要对某个 $i\in\{1,2,\cdots,h_d\}$及一切 $j\in\{1,2,\cdots,c(d,i)\}$都满足 $\operatorname{sgn}(f_{i,j}^{(d)}(\xi_{1,0},\cdots,\xi_{1,m_1},\cdots,\xi_{r,0},\cdots,\xi_{r,m_r}))=\epsilon_{i,j}^{(d)}$,则

$$|\{\xi\in\mathbf{R}|\operatorname{sgn}(g_1(\xi_{1,0},\cdots,\xi_{1,m_1},\cdots,\xi_{r,0},\cdots,\xi_{r,m_r},\xi))=\epsilon_1,\quad 1=1,\cdots,r\}|=d.$$

令 $g_{i,j}^{(d)}=f_{i,j}^{(d)}(I_{1,0},\cdots,I_{1,m_1},\cdots,I_{r,0},\cdots,I_{r,m_r}),G_i^{(d)}=\{g_{i,1}^{(d)},\cdots,g_{i,c(d)}^{(d)}\},i=1,\cdots,h(d),\ j=1,\cdots,c(d,i)$,则 $g_{i,j}^{(d)}\in\mathbf{R}[x_1,\cdots,x_{n-1}]$.

由归纳假设 $\mathbf{R}^{n-1}$中半代数集

$$B_d=\bigcup_{i=1}^{h(d)}\bigcap_{j=1}^{c(d,i)}\{(\xi_1,\cdots,\xi_{n-1})\in\mathbf{R}^{n-1}|\operatorname{sgn}(g_{i,j}^{(d)}(\xi_1,\cdots,\xi_{n-1}))=\epsilon_{ij}\}$$

的基数可在有限步内计算求得,于是 $\mathbf{R}^n$ 中半代数集 $A_n=\{(\xi_1,\cdots,\xi_n)\in\mathbf{R}^n|\operatorname{sgn}(f_i(\xi_1,\cdots,\xi_n))=\epsilon_i,i=1,\cdots,r\}$的基数$|A_k|=\sum_{d=1}^{m}d|B_d|$,从而$|A_k|$可在有限步内计算.

综上知,定理 1 成立.

注 1 定理 1 对一切实闭域都成立.

注 2 定理 1 对 n-维复空间仍成立.

注 3 定理 1 对 $\mathbf{R}^n$ 中由实有理函数组定义的半代数集仍成立.

这是由于上述三种情形都可归结为定理 1 的情形.

二 应 用

现代科学和技术的众多领域都可能直接或间接需要对半代数集的基数进行计算,因此半代数集的计数定理将有广泛应用,例如,在多项式微分系统的全局分析中很多问题都可依此机械地判定. 结合吴方法,下面给出在紧代数流形 Euler 示性数和亏格计算中的应用.

假设 M 是一个由代数方程组

$$\begin{cases}f_1(x_1,,x_n)=0\\ \quad\cdots\\ f_n(x_1,\cdots,x_n)=0\end{cases}\tag{2.1}$$

(其中 $f_i\in\mathbf{R}[x_1,\cdots,x_n],i=1,\cdots,n$)在 $\mathbf{R}^n$ 中的解集所给出的不可约代数簇,同时假定 M 是一个紧代数流形,而且 M 没有奇异点.则由 Morse 理论,可在 M 上构造一个光滑函数 f,通过计算 f 的临界点及其指数得到 M 的 Euler 示性数及其亏格.在计算时若所涉及的函数都是多项式或有理函数,则半代数集计数定理可用.

设 $f:M\to\mathbf{R}$ 是光滑函数,点 $P\in M$ 称为 f 的临界点,若导出映射 $f_*:TM_p\to T\mathbf{R}_{f(p)}$ 是 0 映射,即若在点 P 可选取局部坐标系:$(y_1,\cdots,y_k)$ 使

$$\partial f/\partial y_1=\cdots=\partial f/\partial y_k=0. \tag{2.2}$$

一个临界点 P 称为非蜕化的,如果 Hesse 矩阵 $(\partial^2 f/\partial y_i\partial y_j)_{k\times k}(P)$ 非奇异.

Hesse 矩阵 $(\partial^2 f/\partial y_i\partial y_j)_{k\times k}(P)$ 的负特征值的个数称为 f 在 P 处的指数.

由非蜕化性不依赖于坐标系的选取和 Morse 引理知,指数亦与坐标系的选取无关.

下面讨论紧代数流形 Euler 示性数和亏格的计算.

首先用吴文俊消去法求出(2.1)中多项式组的特征列,若得到矛盾方程组,则 M 为空集.下设 M 非空,令所得特征列为

$$g_1,\cdots,g_\beta, \tag{2.3}$$

则 g_1 中应有 $d=n-\beta+1$ 个独立变量,设为 $x_1,\cdots,x_d$,g_1 对 $x_1,\cdots,x_d$ 求偏导数得 $\partial g_1/\partial x_1,\cdots,\partial g_1/\partial x_d$,取其中 $d-1$ 个与 g_1 联立得方程组

$$\begin{cases}\partial g_1/\partial x_i=0,i=1,\cdots,i\neq k,\\ g_1=0,\end{cases} \tag{2.4}$$

则有

引理 2.1 (2.4)的解集非空.

证明 令 $f=x_k$,由 M 紧,则 f 在 M 上取得极值,而 x_k 是由 $g_1=0$ 确定的 $x_1,\cdots,x_{k-1},x_{k+1},\cdots,x_d$ 的函数,于是极值点满足(2.4),得引理结论.

由定理 1 知方程组(2.4)的解的个数是可计算的.如果方程组(2.4)的解的个数无限,这时换一个 x_k 重新进行以上过程.若方程组(2.4)的解的个数有限,再用定理 1 计算下面方程组

$$\begin{cases}\partial g_1/\partial x_1=0,i=1,\cdots,d,i\neq k,\\ g_1=0,\\ \partial g_1/\partial x_k\neq 0\end{cases} \tag{2.5}$$

的解数.若(2.5)无解,再计算 $f=x_k$ 的 Hesse 矩阵 $M(x_k)=(\partial^2 x_k/\partial x_i\partial x_j)_{(k-1)\times(k-1)}$,记 $M(x_k)$ 的特征多项式为 $F(y)=\det(yI-M(x_k))=Q_{d-1}y^{d-1}+\cdots+Q_0$,其中 Q_i 是 $x_1,\cdots,x_d$ 的有理函数.

由引理 1.2,对 $0\leqslant s\leqslant d-1$ 的每个整数 s,可求得 $\mathbf{Z}$ 上 $u_0,\cdots,u_{d-1}$ 的多项式组 $G_1^{(s)}=\{g_{1,1}^{(s)},\cdots,g_{1,v(s,1)}^{(s)}\},\cdots,G_{c(s)}^{(s)}=\{g_{c(s),1}^{(s)},\cdots,g_{c(s),v(s)}^{(s)}\}$ 及相应的符号列

$$u_1^{(s)}=(\varepsilon_{1,1}^{(s)},\cdots,\varepsilon_{1,v(s,1)}^{(s)}),\cdots,u_{c(s)}^{(s)}=(\varepsilon_{c(s)1,1}^{(d)},\cdots,\varepsilon_{c(s),v(s)}^{(d)})$$

使得对任意 $(\xi_0,\cdots,\xi_{d-1})\in\mathbf{R}^d$ 不等式组 $\xi_{d-1}y^{d-1}+\cdots\xi_0=0,y<0$ 在 $\mathbf{R}$ 上恰有 s 个解的充要条件是对某个 $i\in\{1,\cdots,c(s)\}$ 及一切 $j\in\{1,\cdots,v(s)_i\}$ 都有

$$\operatorname{sgn}(g_{i,j}^{(s)}(\xi_0,\cdots,\xi_{d-1}))=\varepsilon_{i,j}^{(s)}.$$

由定理 1 的注 3 知，可计算下面的半代数集

$$\{(\xi_1,\cdots,\xi_d)\in \mathbf{R}^d | g_1(\xi_1,\cdots,\xi_d)=0,\partial g_1/\partial x_i(\xi_1,\cdots,\xi_d)=0,i=1,\cdots,d,i\neq k,$$
$$\mathrm{sgn}(g_{i,j}^{(s)}(Q_0,\cdots,Q_{d-1})(\xi_0,\cdots,\xi_{d-1}))=\varepsilon_{i,j}^{(s)},j=1,\cdots,v(s,i)\}$$

的基数 C_s，则有

定理 2 M 的 Euler 示性数 $\chi(M)=\sum_{s=0}^{d-1}(-1)^s C_s$，$M$ 的亏格 $g(M)=1/2(2-\chi(M))$.

证明 由 C_s 的意义知道 C_s 就是使 M 上光滑函数 $f=x_k$ 的 Hesse 矩阵恰有 s 个负特征值的临界点个数，即 f 在 M 上指数为 s 的临界点个数，由 Morse 定理得结论.

例 取 M 为三维环面 $F(x,y,z)=(x^2+y^2+z^2+3)^2-16(y^2+z^2)=0$.

在 M 上选光滑函数 $f=z$，则依前述方法计得：$C_0=1,C_1=2,C_2=1$，从而 $\chi(M)=1-2+1=0$，$g(M)=1/2(2-0)=1$.

这里给出的 Euler 示性数和亏格的计算是精确的，不需求出临界点.

对于代数方程组孤立重零点的个数亦可类似计算.

参考文献：

[1] WILLIAM B and et. al. *Recent Advances in Real Algebraic Geometry and Quadratic Forms* [M]. Pro. of the RAGSQUAD Year, Berkely, 1990—1991.

[2] TARSKI A. *A Decision Method for Elementary Algebra and Geometry* [M]. University of Califoria Press, Berkeley, California, 1951.

[3] MILNOR J. *Morse Theory* [M]. Princton University Press, 1963.

[4] 吴文俊. 几何定理机器证明的基本原理(初等几何部分)[M]. 北京：科学出版社，1984.

A Counting Theorem on Semi-Algebraic Set and Its Applications

ZHANG Chuan-lin[1], YU Kai[2]

(1. Dept. of Math., Jinan University, Guangzhou 510632;

2. Dept. of Basi. Sci. of Chengdu Institute of Meteorology 610041)

Abstract: In this paper, a computing principle about the cardinality of semi-algebraic set is given by using Tarski's Principle. Basing on the principle, a calculating method on Euler characteristic number and genus of compact algebraic manifold is presented.

Key words: semi-algebraic set; compact-algebraic manifold; genus.