并素元有限生成格的弱直积分解*

金晨辉
(郑州电子技术学院，450004)

摘 要：本文建立了并素元有限生成格的弱直积分解，并给出一个解决并素元生成的完全 Heyting 代数的直积分解问题的新方法；作为弱直积分解的应用，证明了并素元有限生成的完全 Heyting 代数必然同构于有限个既约的完全 Heyting 代数的直积，证明了并素元有限生成格是 Boole 代数的充要条件是它同构于某有限集的幂集格.

关键词：并素元有限生成格；弱直积分解；完全 Heyting 代数；Boole 代数.
分类号：AMS(1991) 06B/CLC O145
文献标识码：A **文章编号**：1000-341X(2000)02-0283-04

文献 1 通过定义主子格的方法解决了完全分配格的直积分解问题，文献 2 建立了拓扑空间的连通分支分解与格的直积分解之间的联系，并借助于此解决了并素元生成的完全 Heyting 代数的直积分解问题，同时这类格的直积分解问题也为文献 3 通过建立完全 Heyting 代数与完备原子 Boole 代数的内在联系的方法解决. 本文将利用主子格方法解决并素元有限生成格的弱直积分解问题，同时利用主子格方法对并素元生成的完全 Heyting 代数的直积分解定理给出一个新的证明，这种方法较已有方法更为直接. 作为弱直积分解的应用，我们将证明并素元有限生成的完全 Heyting 代数必然同构于有限个既约完全 Heyting 代数的直积，证明并素元有限生成格是 Boole 代数的充要条件是它同构于某有限集的幂集格.

本文中所涉及的格均假设为具有最小元 0 的格，并约定空集是有限集，空集的并是最小元 0. 首先给出弱直积分解的概念.

定义 1 设 $\{L_i\}_{i\in I}$ 是一族具有最小元的格，规定 $\{L_i\}_{i\in I}$ 的弱直积为

$$\coprod_{i\in I} L_i = \{\{x_i\}_{i\in I}: \text{诸 } x_i \in L_i \text{ 且只有有限个 } x_i \text{ 非零}\}$$

则 $\coprod_{i\in I} L_i$ 构成直积 $\prod_{i\in I} L_i$ 的一个子格，称为 $\{L_i\}_{i\in I}$ 的弱直积. 映射 $p_i: L_i \to \coprod_{i\in I} L_i$ 称为嵌入映射，其中 $\forall\, x \in L_i, p_i(x) = \{x_j\}_{j\in I}$，而 $x_i = x$，但 $j \neq i$ 时 $x_j = 0$.

定义 2 (1) 设 L 是一个格，$\{L_i\}_{i\in I}$ 是一族具有最小元的格，如果 L 与 $\coprod_{i\in I} L_i$ 格同构（即存在 L 至 $\coprod_{i\in I} L_i$ 的保有限交和有限并的双射），则称 $\{L_i\}_{i\in I}$ 是 L 的一个弱直积分解；

(2) 如果 L 不能分解为两个及两个以上非单点格的弱直积，则称 L 为既约格.

(3) 设 $\{L_i\}_{i\in I}$ 是 L 的一个弱直积分解，若 $\forall\, i \in I, L_i \neq \{0\}$ 且是既约格，则称 $\{L_i\}_{i\in I}$ 是 L

* 收稿日期：1997-04-21
作者简介：金晨辉(1965-)，男，博士，副教授.

的一个既约弱直积分解；约定单点格是其自身的既约弱直积分解.

(4) 设$\{L_i\}_{i\in I}$和$\{L_j\}_{j\in J}$是L的两个弱直积分解，若存在双射$g: I\to J$，使$\forall i\in I, L_i$与$L_{g(i)}$格同构，则称L的弱直积分解$\{L_i\}_{i\in I}$与弱直积分解$\{L_j\}_{j\in J}$等价.

定义 3 如果格L中每一元均是L中某些并素元的并，则称L是并素元生成格；如果格L中每一元均是L中有限个并素元的并，则称L是并素元有限生成格.

由格论知，并素元生成格一定是分配格.

格L满足交无限分配律指：$\forall a, a_i\in L, i\in I, \sup\limits_{i\in I} a_i$存在蕴含$\sup\limits_{i\in I}(a\wedge a_i)$存在且为$a\wedge\sup\limits_{i\in I} a_i$；映射$f: L\to L'$保存在并指：$\forall a_i\in L, i\in I$，如果$\sup\limits_{i\in I} a_i$存在，则$\sup\limits_{i\in I} g(a_i)$存在且为$g(\sup\limits_{i\in I} a_i)$. 类似可定义保存在交的概念.

定理 1 设L是并素元有限生成格，M是L的非零并素元全体，$a\in M$. 记

$$[a]=\{m\in M: 存在\ m_1,\cdots,m_k\in M, 使\ a\wedge m_1\neq 0, m_1\wedge m_2\neq 0,\cdots, m_k\wedge m\neq 0\},$$

则$L[a]=\{x\in L: x$是$[a]$中有限个元的并$\}$构成L的一个理想[4]，称作L的由a决定的主子格. 又若L满足交无限分配律，则$L[a]$还对存在并封闭.

证明 设$A\in L[a], B\in L$，且$B\leqslant A$，则存在M的有限子集H，使得$A=supH$，从而$\forall b\in M$且$b\leqslant B$，有$b=b\wedge\sup H=\sup\limits_{h\in H}(b\wedge h)$，故存在$h\in H$，使得$b\wedge h\neq 0$，即有$b\in L[a]$，故由$B$是$M$中有限个元的并知$B\in L[a]$，这表明$L[a]$是下集. $L[a]$显然对有限并封闭，因而构成L的一个理想.

如果L还满足交无限分配律，设b是$L[a]$中元的并，则b也是$[a]$中元的并，与$L[a]$是下集的证明类似，借助于交无限分配律可证$\leqslant b$的非零并素元必属于$[a]$，从而由b是有限个并素元的并知$b\in L[a]$，即$L[a]$对存在并封闭.

定理 2 设L是并素元有限生成格，则L的主子格全体构成L的一个既约弱直积分解，且L的任意两个既约弱直积分解等价.

证明 设$\{L_i\}_{i\in I}$是L的主子格全体，M为L的非零并素元全体，定义映射$f: L\to\prod\limits_{i\in I} L_i$为：$\forall A\in L, f(A)=\{a_i\}_{i\in I}$，其中诸$a_i=\sup(H\cap L_i)$，$H$为$M$的有限子集且使$A=\sup H$，则易证$f$是保有限并的双射. 现证$f$保存在交. 设$f(A)=\{a_j\}_{j\in I}, f(A_i)=\{a_{ij}\}_{j\in I}$，且$A=\inf\limits_{i\in\Omega} A_i$. 由$f$保序知$f(A)$是诸$f(A_i)$的下界，即$\forall j\in I, a_j$是$a_{ij}, i\in\Omega$的一个下界. 若$\forall i\in\Omega$，均有$b\leqslant a_{ij}$，则$b\leqslant A_i$，从而$b\leqslant\inf\limits_{i\in\Omega} A_i=A=\sup\limits_{i\in I} a_i$，又因只有有限个$a_i$不为0，故有

$$b=b\wedge\sup_{i\in I} a_i=\sup_{i\in I}(b\wedge a_i)=b\wedge a_j\leqslant a_j$$

此表明a_j是$a_{ij}, i\in\Omega$的下确界，从而$f(A)=\inf\limits_{i\in\Omega} f(A_i)$，故$f$保存在交因而为格同构，即$L$的主子格全体构成$L$的一个弱直积分解.

考虑L的主子格L_i. 记$g: \prod\limits_{j\in J} L_{ij}\to L_i$是格同构，且$L_{ij}$的非零并素元全体$M_j$非空. 易证$\{p_j(a): a\in M_j, j\in J\}$是$\prod\limits_{j\in J} L_{ij}$的非零并素元全体. 取$a\in M_s, b\in M_t$，则有

$$[gp_s(a)]\subset gp_s(M_s)\ 及\ [gp_t(b)]\subset gp_t(M_t),$$

因$s\neq t$时，有$gp_s(M_s)\cap gp_t(M_t)=\Phi$，故由$L[gp_s(a)]=L_i=L[gp_t(b)]$知$s=t$，即$J$是单点集，从而$L_i$是既约格，即$L$的主子格全体构成$L$的一个既约弱直积分解.

设$\{L_i'\}_{i\in J}$也是L的既约弱直积分解，$g: \prod\limits_{i\in I} L_i'\to L$是格同构，则类似前面可证，$\forall i\in J$，

$gp_i(L_i')$ 必然包含 L 的一个主子格；但 L_i' 是既约格，因而 $L_i' = L[a]$（a 是 L_i' 的非零并素元），故由 gp_i 是保有限交的单射知，$\forall\, m \in L_i, m \wedge a \neq 0$ 蕴含 $gp_i(m \wedge a) \neq 0$，即$gp_i(m) \wedge gp_i(a) \neq 0$，故$gp_i([a]) \subset [gp_i(a)]$，再由 gp_i 保有限并知 $gp_i(L_i') \subset L[gp_i(a)]$，因而 $gp_i(L_i')$ 必是 L 的主子格，定义映射 $\psi: J \to I$ 使得 $gp_j(L_j') = L_{\psi(j)}$，则 ψ 显然是双射，这表明 L 的任意两个既约弱直积分解等价.

注 1 如果 L 满足交无限分配律，则定理 2 证明中构造的 f 还是保存在并的格同构.

证明 设 $f(A) = \{a_i\}_{i\in I}, f(A_i) = \{a_{ij}\}_{j\in I}$，且 $A = \sup\limits_{i\in\Omega} A_i$. 则由 f 的保序性知 $\forall\, i \in \Omega$，有$f(A_i) \leqslant f(A)$，即 $\forall\, j \in I, a_j$ 均是 $a_{ij}, i \in I$ 的上界，下证 a_j 均是 $a_{ij}, i \in I$ 的上确界. 对固定 $j \in I$，设 a 是 $a_{ij}, i \in I$ 的一个上界，则有

$$a_j = a_j \wedge A = a_j \wedge \sup_{i\in\Omega, t\in I} a_{it} = \sup_{i\in\Omega, t\in I}(a_j \wedge a_{it}) = \sup_{i\in\Omega}(a_j \wedge a_{ij}) \leqslant a_j \wedge a,$$

从而 $a_j \leqslant a$，故 a_j 是 $a_{ij}, i \in I$ 的上确界，即 $a_j = \sup\limits_{i\in\Omega} a_{ij}$，因而 $f(A) = \sup\limits_{i\in\Omega} f(A_i)$.

注 2 设 L 是并素元生成的完全 Heyting 代数，此时将定理 1 主子格定义中的 $L[a]$ 修改为 $L[a] = \{x \in L: x$ 是$[a]$ 中元的并$\}$，则这样定义的主子格构成L 的完备子格. 又若将定理 2 中的并素元有限生成格修改为并素元生成的完全 Heyting 代数，弱直积分解的有关术语修改为直积分解的有关术语（参见文献 2），借助交无限分配律可证修改后的定理 2 仍然成立，且此时证明中构造的同构 f 还保任意交和任意并. 这说明利用主子格方法可以构造出并素元生成的完全 Heyting 代数的既约直积分解，这是异于文献 2 和文献 3 的对并素元生成的完全 Heyting 代数进行既约直积分解的另一种方法.

定理 3 设 L 是并素元有限生成的完全 Heyting 代数，则有

（1） L 是既约格等价于 L 是直积分解意义下[1][2][3] 的既约格；

（2） L 同构于有限个既约完全 Heyting 代数的直积，且该同构保任意交和任意并.

证明 由于此时定理 2 证明中构造的同构也保无限交和无限并，因而 L 的主子格全体的弱直积是完备格，但由定理 1 知，此时 L 的主子格是 L 的完备子格，而无限个完备格的弱直积一定不是完备格，故 L 必然只有有限个主子格；又因 L 的主子格是完备格，故由注 2 知 L 的主子格全体也构成 L 的直积分解意义下的既约直积分解，故本定理成立.

定理 4 设 L 是并素元有限生成格，则

（1） 如果 L 中互异并素元两两不交，则 L 必同构于某个集合的有限子集构成的格.

（2） L 是 Boole 代数的充要条件是它同构于某个有限集的幂集格.

证明 （1）记 M 为 L 的非零并素元全体，不妨设 $M \neq \varnothing$，则 $L_x = \{x, 0\}, x \in M$ 是 L 的主子格全体，故由定理 1 知 L 同构于 $\coprod\limits_{x\in M} L_x$，后者显然同构于 M 的有限子集构成的格.

（2） 设 L 是 Boole 代数，则 L 中不同并素元不交，这是因为若 x 和 y 均是 L 中并素元且 $x \wedge y \neq 0$，则 $y \nleqslant x'$（x' 为 x 的补元），从而由 $y \leqslant x \vee x'$ 知 $y \leqslant x$；同理可证 $x \leqslant y$，因而有 $x = y$. 又设 L 中最大元是非零并素元 $m_1, \cdots, m_n$ 的并，则 $m_1, \cdots, m_n$ 是 L 的全部非零并素元，从而由（1）知 L 同构于有限集$\{m_1, \cdots, m_n\}$ 的幂集格 .

推论 并素元有限生成的 Boole 代数必是有限格.

参考文献：

[1] 樊磊，崔宏斌，郑崇友. 分子格的直积分解与广义序同态的构造 [J]. 科学通报，1987，**32**(21)：1611—1614

[2] 王戈平，王晓明. 一类完备格的直积分解与 Fuzzy 格的构造 [J]. 数学学报，1993，**36**(1)：45—52

[3] 何伯儒. 拓扑均衡支撑分子格 [J]. 数学学报，1992，**32**(5)：643—651

[4] GIERZ G et al. *A compendium of Continuous Lattices* [*M*]. *Springer-Verlag*，1980.

Weak Direct Product Decompositions of Lattices Generated Finite-Wisely by co-Primes

JIN Chen-hui

(Zhengzhou Electronic Technology College，450004)

Abstract：In this paper，we establish the weak direct product decompositions of lattices generated finite-wisely by co-primes，and solve the problem of direct product decompositions of complete Heyting algebras generated by co-primes in a new way. As applications，we prove that complete Heyting algebras generated finite-wisely by co-primes are isomorphic to the direct product of finite many irreducible complete Heyting algebras，and prove that a lattice generated finite-wisely by co-primes is a Boolean algebra if and only if it's isomorphic to the power set lattice of a finite set.

Key words：lattice generated finite-wisely by co-primes；weak direct product decomposition；complete Heyting algebra；Boolean algebra.