第20卷第2期 数学研究与评论 Vol. 20 No. 2
2000年5月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION May 2000

分配 P-代数的核理想与余核滤子*

杨 云
(湖北教育学院数学系，武汉 430060)

摘 要:本文的主要结果是给出了分配 P-代数中一个理想成为核理想的充要条件,同时提出了余核滤子的概念,研究了核理想与余核滤子之间的某些内在联系.

关键词:分配 P-代数;核理想;余核滤子.
分类号:AMS(1991) 060D30/CLC O153.1
文献标识码:A **文章编号**:1000-341X(2000)02-0291-04

1 引 言

在文献[1]中,Verlt 在 De Morgan 代数中提出了一个理想相对于一个滤子是素的新概念,并利用它去刻画一类能成为至少某个同余关系核的理想,得到了一些结果,将此概念引入到分配 P-代数中,考虑分配 P-代数中一个理想满足什么条件能成为至少某个 $*$-同余关系的核,这样的理想称为核理想.同时提出了余核滤子的概念,研究分配 P-代数中核理想与余核滤之间的内在联系.本文中的分配 P-代数是指一个(2,2,1,0,0)型代数$(L;\wedge,\vee,*,0,1)$,其中$(L;\wedge,\vee,0,1)$是有界分配格,0,1 分别是 L 的最小元和最大元,一元运算 $*$ 指:对任给的 $a\in L$,存在 $a^*\in L$ 使得对任意 $x\in L$,$a\wedge x=0$ 等价于 $x\leqslant a^*$.

2 基本概念与引理

本文中的 L 均指分配 P-代数$(L;\vee,\wedge,*,0,1)$.

定义 1 设 I 是 L 的真理想,F 是 L 的滤子,如果满足:对任意 $x,y\in L$,$x\wedge y\in I$,由 $y\in F$ 可推出 $x\in I$,称理想 I 相对于滤子 F 是素的.

定义 2 设 θ 是 L 上的格同余关系,若 θ 保持一元运算 $*$,称 θ 为 L 上的 $*$—同余关系,记为 θ_*.

定义 3 设 I 是 L 的理想,如果存在 L 上某个 $*$—同余关系 θ_* 使得 $I=\mathrm{Ker}\theta_*$,称 I 是核理想.

定义 4 设 F 是 L 的滤子,如果存在 L 上某个 $*$—同余关系 φ_* 使得 $F=\mathrm{Cok}\varphi_*=\{x\in L\mid x\equiv 1(\varphi_*)\}$,称 F 是余核滤子.

引理 1 设 I 是 L 的理想,令 $I^*=\{x\in L\mid 存在\ i\in I,x\geqslant i^*\}$,$I_{**}=\{x\in L\mid 存在\ i\in I,x\leqslant$

* 收稿日期:1997-04-04
作者简介:杨 云(1956-),女,湖北武汉人,副教授.

$i^{**}\}$,则

(1) I_{**}是 L 的理想且 $I\subseteq I_{**}$,当 I 是核理想时,$I=I_{**}$.特别若 $I=(d]$是主理想,当 $d\in S(L)$时,$I=I_{**}$.

(2) I^*是 L 的滤子,当 I 是核理想且 $I^*\neq L$ 时,$I^*\cap I=\phi$.

证明 任给 $x,y,\in I_{**}$,存在 $i,j\in I$ 使得 $x\leqslant i^{**}$,$y\leqslant i^{**}$,$x\vee y\leqslant i^{**}\vee j^{**}\leqslant(i\vee j)^{**}$,因为 $i\vee j\in I$,所以 $x\vee y\in I_{**}$.

任给 $a\in L,x\in I_{**}$且 $x\geqslant a$,存在 $i\in I$ 使得 $a\leqslant x\leqslant i^{**}$,从而 $a\in I_{**}$,故 I_{**}是 L 的理想.对任意 $i\in I,i\leqslant i^{**}$,有 $i\in I_{**}$,于是 $I\subseteq I_{**}$.当 I 是核理想时,存在 L 上 $*$-同余关系 θ_*使得 $I=\mathrm{Ker}\theta_*$.于是,对任意 $x\in I_{**}$,存在 $i\in I,x\leqslant i^{**}$.又 $i\in I=\mathrm{Ker}\theta_*$,故 $i\equiv 0(\theta_*)$,从而 $i^{**}\equiv 0(\theta_*)$,而 $x\leqslant i^{**}$,于是有 $x=x\wedge i^{**}\equiv x\wedge 0(\theta_*)=0(\theta_*)$,因此 $x\in\mathrm{Ker}\theta_*=I$,从而 $I_{**}\subseteq I$,故 $I_{**}=I$.特别当 $I=(d]$是主理想时,$d\in S(L)$等价于 $d^{**}=d$.对任给的 $x\in I_{**}$,存在 $i\in I=(d]$使得 $x\leqslant i^{**}\leqslant d^{**}=d$.于是有 $x\in I=(d]$,从而 $I_{**}\subseteq I$.故 $I=I_{**}$.

(2) 类似于(1)易证 I^*是 L 的滤子.若 $I\cap I^*\neq\phi$,则存在 $x\in I\cap I^*$使得 $x\in I$ 且 $x\geqslant i^*$,$i\in I$.于是 $x^*\leqslant i^{**}$,因此 $x^*\in I_{**}$.由(1)知当 I 是核理想时,$I=I_{**}$,由此知 $x^*\in I$.所以 $a=x\vee x^*\in I\cap D(L)$,从而 $a^*=0\in I^*$,由此推得 $I^*=L$,矛盾.故 $I\cap I^*=\varnothing$.

引理 2 设 L 是分配 P-代数,对任给的 $x,y,a\in L$,若 $x\wedge a^*=y\wedge a^*$,则 $x^*\wedge a^*=y^*\wedge a^*$.

证明 由 $x\wedge a^*=y\wedge a^*$可推出$(x\wedge a^*)^{**}=(y\wedge a^*)^{**}$,从而 $x^{**}\wedge a^*=y^{**}\wedge a^*$,$(x^*\wedge a^*)\wedge(x^{**}\wedge a^*)=0=(y^*\wedge a^*)\wedge(y^{**}\wedge a^*)$.因为 $a^*,x^*,y^*\in S(L)=\{x^*\mid x\in L\}$,在布尔代数$(S(L);\wedge,\cup,*,0,1)$中(其中 $U:x\cup y=(x^*\wedge y^*)^*$)$x^*$是 x^{**}的布尔补元,即 $x^*\wedge x^{**}=0$,$x^*\cup x^{**}=(x^{**}\wedge x^*)^*=0^*=1$,所以$(x^*\wedge a^*)\cup(x^{**}\wedge a^*)=a^*\wedge(x^*\cup x^{**})=a^*\wedge 1=a^{**}$.同理$(y^*\wedge a^*)\cup(y^{**}\wedge a^*)=a^*$.利用 $x^{**}\wedge a^*=y^{**}\wedge a^*$得

$$\begin{cases}(x^*\wedge a^*)\wedge(x^{**}\wedge a^*)=(y^*\wedge a^*)\wedge(x^{**}\wedge a^*)\\(x^*\wedge a^*)\cup(x^{**}\wedge a^*)=(y^*\wedge a^*)\cup(x^{**}\wedge a^*)\end{cases}$$

因为$(S(L);\wedge,\cup)$是分配格,所以 $x^*\wedge a^*=y^*\wedge a^*$.

3 主要结果

定理 1 设 I 是 L 的理想,则 I 是核理想的充要条件是 I 相对于滤子 $D(L)$是素的.

证明 *必要性* 设 I 是核理想,则存在 L 上某个 $*$-同余关系 θ_*使得 $I=\mathrm{Ker}\theta_*$,设 $x\wedge y\in I,y\in D(L)$,则 $x\wedge y\equiv 0(\theta_*)$.于是$(x\wedge y)^*\equiv 1(\theta_*)$,从而$(x\wedge y)^{**}\equiv 0(\theta_*)$,即 $x^{**}\wedge y^{**}\equiv 0(\theta_*)$.又 $y\in D(L)$,即 $y^{**}=1$,于是 $x^{**}\wedge 1\equiv 0(\theta_*)$,因此 $x^{**}\equiv 0(\theta_*)$.而 $x\leqslant x^{**}$,由此有 $x=x\wedge x^{**}\equiv x\wedge 0(\theta_*)=0(\theta_*)$,故 $x\in\mathrm{Ker}\theta_*=I$.

充分性 设 I 相对于 $D(L)$ 是素的,作 θ_* 如下:$x\equiv y(\theta_*)$当且仅当存在 $i\in I$ 使得 $x\wedge i^*=y\wedge i^*$,下面证明 θ_* 是 L 上的 $*$-同余关系且 $I=\mathrm{Ker}\theta_*$.

显然 θ_* 具有自反性和对称性.

设 $x\equiv y(\theta_*)$,$y\equiv z(\theta_*)$,则存在 $i,j\in I$ 使得 $x\wedge i^*=y\wedge i^*$,$y\wedge j^*=z\wedge j^*$.于是有 $x\wedge(i^*\wedge j^*)=y\wedge(i^*\wedge j^*)=z\wedge(i^*\wedge j^*)$.又 $i^*\wedge j^*=(i\vee j)^*$,$i\vee j\in I$,故

$x \wedge (i \vee j)^* = z \wedge (i \vee j)^*$,因此有 $x \equiv z(\theta_*)$,即 θ_* 具有传递性.

对任给的 $z \in L$,设 $x \equiv y(\theta_*)$,存在 $i \in I$ 使得 $x \wedge i^* = y \wedge i^*$,从而 $(x \wedge z) \wedge i^* = (y \wedge z) \wedge i^*$,进而 $x \wedge z \equiv y \wedge z(\theta_*)$,类似地 $(x \vee z) \wedge i^* = (x \wedge i^*) \vee (z \wedge i^*) = (y \wedge i^*) \vee (z \wedge i^*) = (y \vee z) \wedge i^*$,故有 $x \vee z \equiv y \vee z(\theta_*)$.

设 $x \equiv y(\theta_*)$,则存在 $i \in I$ 使得 $x \wedge i^* = y \wedge i^*$,由引理 2 知 $x^* \wedge i^* = y^* \wedge i^*$,于是有 $x^* \equiv y^*(\theta_*)$,故 θ_* 是 $*$-同余关系.

对任意的 $i \in I$,$i \wedge i^* = 0 = 0 \wedge i^*$,由此有 $i \equiv 0(\theta_*)$,从而有 $i \in \mathrm{Ker}\theta_*$. 因此有 $I \subseteq \mathrm{Ker}\theta_*$. 反之,对任给的 $x \in \mathrm{Ker}\theta_*$,$x \equiv 0(\theta_*)$,则存在 $i \in I$ 使得 $x \wedge i^* = 0 \wedge i^* = 0$,因而有 $x \leqslant i^{**}$,由此得 $i = i^{**} \wedge (i \vee i^*) \geqslant x \wedge (i \vee i^*)$. 因为 I 是理想且 $i \in I$,所以 $x \wedge (i \vee i^*) \in I$. 而 $i \vee i^* \in D(L)$,由 I 相对 $D(L)$ 是素的可知 $x \in I$,于是有 $\mathrm{Ker}\theta_* \subseteq I$,故 $I = \mathrm{Ker}\theta_*$.

定理 2 设 P 是 L 的素理想,若 $P^* \neq L$,则 P 是核理想.

证明 作 θ_P:$x \equiv y(\theta_P)$ 当且仅当 $x, y \in P$ 或 $x, y \in L - P$. 由文献[2]知 θ_P 是 L 上的格同关系,故只须证明 θ_P 保持一元运算 $*$ 且 $P = \mathrm{Ker}\theta_P$.

设 $x \equiv y(\theta_P)$,则 $x, y \in P$ 或 $x, y \in L - P$. 若 $x, y \in P$,则 $x^*, y^* \notin P$. 若不然,不防设 $x^* \in P$,则 $a = x \vee x^* \in P \cap D(L)$. 于是 $a^* = 0 \in P^*$,从而 $P^* = L$ 矛盾. 故 $x^*, y^* \in L - P$. 若 $x, y \in L - P$ 即 $x, y \notin P$,则由 $x \notin P$,$x \wedge x^* = 0 \in P$,P 是素理想可得 $x^* \in P$. 同理由 $y \notin P$ 可得 $y^* \in P$,即 $x^*, y^* \in P$,故 $x^* \equiv y^*(\theta_P)$.

对任给的 $x \in P$,由 $0 \in P$ 有 $x \equiv 0(\theta_P)$,于是 $x \in \mathrm{Ker}\theta_P$,从而 $P \subseteq \mathrm{Ker}\theta_P$. 反之,对任给的 $x \in \mathrm{Ker}\theta_P$,有 $x \equiv 0(\theta_P)$,从而 $x, 0 \in P$ 或 $x, 0 \in L - P$. 因为 $0 \notin L - P$,所以只有 $x, 0 \in P$. 于是 $x \in P$,由此可知 $\mathrm{Ker}\theta_P \subseteq P$. 故 $P = \mathrm{Ker}\theta_P$ 是核理想.

定理 3 设 I 是 L 的理想,则 I^* 是 L 的余核滤子且 $\theta_* = \bigvee_{i \in I} \theta_L(i^*, 1)$ 是以 I^* 为余核的最小 $*$-同余关系.

证明 由引理 1 知 I^* 是 L 的滤子. 令 $\theta_* = \bigvee_{i \in I} \theta_L(i^*, 1)$. 由引理 2 知,对任给的 $i \in I$,$\theta_L(i^*, 1)$ 是 $*$-同余关系,从而 θ_* 是 L 上的 $*$-同余关系.

对任意 $x \in I^*$,存在 $i \in I$ 使得 $x \geqslant i^*$,注意到 $i^* \equiv 1(\theta_L(i^*, 1))$,可得 $x = x \vee i^* \equiv x \vee 1(\theta_L(i^*, 1)) = 1(\theta_L(i^*, 1))$. 因 $\theta_L(i^*, 1) \leqslant \theta_*$,故 $x \equiv 1(\theta_*)$,于是 $x \in \mathrm{Cok}\theta_*$,从而 $I^* \subseteq \mathrm{Cok}\theta_*$. 反之,对任意的 $x \in \mathrm{Cok}\theta_*$,有 $x \equiv 1(\theta_*)$,即 $x \equiv 1(\bigvee_{i \in I} \theta_L(i^*, 1))$. 由文献[2]知,存在 $z_0 = x, z_1, \cdots, z_{n-1} = 1 \in L$,对 $0 \leqslant i \leqslant n-1$ 有 $z_i \equiv z_{i+1}(\theta_i)$,$\theta_i = \theta_L(x_i^*, 1)$,对某个 $x_i \in I$. 由 $z_i \equiv z_{i+1}(\theta_L(x_i^*, 1))$ 可得 $z_i \wedge x_i^* = z_{i+1} \wedge x_i^*$ $(0 \leqslant i \leqslant n-1)$. 于是 $x \wedge x_0^* = z_1 \wedge x_0^*$,$z_1 \wedge x_1^* = z_2 \wedge x_1^*$,$z_2 \wedge x_2^* = z_3 \wedge x_2^*$,$\cdots$,$z_{n-2} \wedge x_{n-2}^* = z_{n-1} \wedge x_{n-2}^* = 1 \wedge x_{n-2}^* = x_{n-2}^*$,因此有 $x \wedge (x_0^* \wedge x_1^* \cdots \wedge x_{n-2}^*) = z_1 \wedge (x_0^* \wedge x_1^* \wedge \cdots \wedge x_{n-2}^*) = \cdots = 1 \wedge (x_0^* \wedge x_1^* \wedge \cdots x_{n-2}^*) = x_0^* \wedge x_1^* \wedge \cdots \wedge x_{n-2}^*$. 在分配 P-代数 L 中,对 n 用归纳法易证:$x_0^* \wedge x_1^* \wedge \cdots x_{n-2}^* = (x_0 \vee x_1 \vee \cdots \vee x_{n-2})^*$. 令 $i = x_0 \vee x_1 \vee \cdots \vee x_{n-2} \in I$,则有 $x \wedge i^* = i^*$. 于是 $i^* \leqslant x$,由此可知 $x \in I^*$,从而有 $\mathrm{Cok}\theta_* \subseteq I^*$. 故 $I^* = \mathrm{Cok}\theta_*$ 是余核滤子.

设 φ_* 是任意以 I^* 为余核的 $*$-同余关系,即 $I^* = \mathrm{Cok}\varphi_*$. 设 $x \equiv y(\theta_*)(x \leqslant y)$. 在上面的证明中将 $x \equiv 1(\theta_*)$ 中的 1 换成 y,完全仿上面的证明可知存在 $j \in I$ 使 $x \wedge j^* = y \wedge j^*$.

因为$j\in I$,所以$j^*\in I^*=\mathrm{Cok}\varphi_*$.于是$j^*\equiv 1(\varphi_*)$,由此得到$x\equiv x\wedge j^*(\varphi_*)=y\wedge j^*(\varphi_*)\equiv y(\varphi_*)$,从而$\theta_*\leqslant\varphi_*$.故$\theta_*$是以$I^*$为余核的最小 $*$-同余关系.

设I是L的理想,θ_*是L上的 $*$-同余关系且$I=\mathrm{Ker}\theta_*$.一般有$I^*\subseteq\mathrm{Cok}\theta_*$.事实上,对任意$x\in I^*$,存在$i\in I$使$x\geqslant i^*$,由$i\in I=\mathrm{Ker}\theta_*$得$i\equiv 0(\theta_*)$.于是$i^*\equiv 1(\theta)_*$,由此有$x=x\vee i^*\equiv x\vee 1(\theta_*)=1(\theta_*)$,从而$x\in\mathrm{Cok}\theta_*$,故$I^*\subseteq\mathrm{Cok}\theta_*$.下面的定理告诉我们,当$I^*$满足一定条件时有$I^*=\mathrm{Cok}\theta_*$.

定理 4 设I是L的理想,θ_*是L上的 $*$-同余关系且$I=\mathrm{Ker}\theta_*$,若$D(L)\subseteq I^*$,则$I^*=\mathrm{Cok}\theta_*$.

证明 由上面讨论知$I^*\subseteq\mathrm{Cok}\theta_*$.对任意$x\in\mathrm{Cok}\theta_*$,有$x\equiv 1(\theta_*)$,于是有$x^*\equiv 0(\theta_*)$,由此可知$x^*\in\mathrm{Ker}\theta_*=I$,从而$x^{**}\in I^*$.因此存在$j\in I$使得$x^{**}\geqslant j^*$.所以$x=x^{**}\wedge(x\vee x^*)\geqslant j^*\wedge(x\vee x^*)$.由$x\vee x^*\in D(L)\subseteq I^*$知,存在$k\in I$使$x\vee x^*\geqslant k^*$,因此$x\geqslant j^*\wedge k^*=(j\vee k)^*$.由$j\vee k\in I$知$x\in I^*$,于是$\mathrm{Cok}\theta_*\subseteq I^*$,故$I^*=\mathrm{Cok}\theta_*$.

定理 5 设I是L的理想,θ_*是L上 $*$-同余关系且$I^*=\mathrm{Cok}\theta_*$,若$I=I_{**}$,则$I=\mathrm{Ker}\theta_*$.

证明 设$I^*=\mathrm{Cok}\theta_*$,对任意$x\in I$,有$x^*\in I^*$.于是$x^*\equiv 1(\theta_*)$.因此$x^{**}\equiv 0(\theta_*)$.而$x\leqslant x^{**}$.故有$x\equiv 0(\theta_*)$.由此可知$x\in\mathrm{Ker}\theta_*$,从而$I\subseteq\mathrm{Ker}\theta_*$.反之,对任意$x\in\mathrm{Ker}\theta_*$,有$x\equiv 0(\theta_*)$,于是有$x^*=1(\theta_*)$由此可知$x^*\in I^*$.因此,存在$i\in I$使$x^*\geqslant i^*$,从而有$x\leqslant x^{**}\leqslant i^{**}$.于是$x\in I_{**}=I$.这意味着$\mathrm{Ker}\theta_*\subseteq I$.故$I=\mathrm{Ker}\theta_*$.

作者对武汉大学数学系裴礼文教授、郑延履教授的悉心指导深表感谢.

参考文献:

[1] VARLET J C. *Congruences on De Morgan algebra* [J]. Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liége 50e année, 1981, (**9**—**10**): 332—344.

[2] GRÄTZER G. *General Lattice Theory* [M]. Basel: Brikhäuser Verlag, 1978.

[3] BLYTH T S, VARLET J C. *On a common obstraction of De Morgan algebras and Stone algebras* [J]. Proceedings of the Royal Society of Edindurgh, 1983, **94**A: 301—308.

Kernel Ideal and Cokernel Filter In Distributive *P*-Algebra

YANG Yun

(Dept. of Math., Hubei Education College, Wuhan 430060)

Abstract: This paper gives a sufficient and necessary conditions that a ideal is a kernel ideal in a distributive *P*-algebra. Besides, it introduces cokernel filter and studies some relations between kernel ideals and cokernel filters.

Key words: distributive *P*-algebra; kernel ideal; cokernel filter.