第 20 卷第 2 期 数学研究与评论 Vol. 20 No. 2
2000 年 5 月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION May 2000

关于矩阵奇异值分解的注记*

李 样 明
(广东教育学院数学系, 广州 510303)

摘　要:本文首先改进"具有奇异值分解性质的代数"一文的引理 1 及证明,再给出其定理 1 的简证,最后指出"关于'体上矩阵的广义逆'一文的注"中一段话的错误.

关键词:域上代数; 奇异值分解; p-除环; 错误.
分类号:AMS(1991) 15A33/CLC O151.21
文献标识码:A　　**文章编号**:1000-341X(2000)02-0311-02

设 F 为域,R 为一个带有对合[1](即对合反自同构)$a\to\bar{a}$ 的 F-(结合)代数,记 R 的对称元素集合:$R^+=\{a\in R|\bar{a}=a\}$. 文[2]给出如下定义:如果任取 R 上非零矩阵 A,存在 R 上酉矩阵 U,V,使得 $A=U\begin{pmatrix}\Sigma & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}V$,其中 $\Sigma=\mathrm{diag}\{\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_r\}$, $0\neq\sigma_i\in F\cap R^+$, $i=1,2,\cdots,r$,则称 R 为一个有 SVD(即奇异值分解)性质的代数,文[2]进一步给出 SVD 代数的结构定理.

定理 1　设 R 为一个带有对合的域上代数,则 R 为一个有 SVD 性质的代数的充分必要条件是:R 同构于 R^+,或 R 上二次扩域 $R^+(\sqrt{-1})$,或 R 上四元数体$\left(\frac{-1,-1}{R^+}\right)$,其中 R^+ 为一个 Galois 序闭域.

本文首先对文[2]的引理 1 及证明进行修正,再给出上定理 1 的必要性(即文[2]中引理 5)的简证,最后指出文[3]中一段话的错误.

1). **文[2]的引理 1 为**:设 R 为一个有 SVD 性质的 F-代数,则 R^+ 为 F 的一个子域,并且 R^+ 为一个形式实域和 Pythagorean 域. 另外,R 中无零因子.

在文[2]对它的证明中,有这样一步:"任取 $a\in R^+$,显然存在 $\sigma\in R^+\cap F$,使 $a^2=a\bar{a}=\sigma^2$,因此 $a=\pm\sigma\in F$,从而 $R^+\subseteq F$".

这个推理在逻辑是欠严密的,例如在实四元数域中,有 $i^2=j^2=-1$,但推不出 $j=\pm i$. 实际上引理 1 及证明可修正为:

命题　设 R 为一个有 SVD 性质的 F-代数,则 $R^+=F$. 并且 R^+(即 F)为实 Pythagorean 域.

证明　只须证 $R^+=F$,其余同文[2].

由对合映射的定义知显然有 $F=F\cdot 1\subseteq R^+$.

---

* 收稿日期:1997-07-02
作者简介:李样明(1965-),男,副教授,现为中山大学数学系在职博士研究生.

反之，由 R 的定义知$\forall\ 0\neq a\in R^+$，存在 $\sigma\in R^+\cap F$，使 $a^2=a\bar{a}=\sigma^2\in F$，从而对$\forall\ a\in R^+$，有 $a^2\in F$. 注意到 $\mathrm{ch}F\neq 2$(下面有证明)，$\forall\ a\in R^+$有 $a+1\in R^+$，$a=\frac{1}{2}[(a+1)^2-a^2-1]\in F$，故 $R^+\subseteq F$，从而 $R^+=F$. □

2). **定理 1 必要性的证明**：首先 $\mathrm{ch}F\neq 2$. 若否，$\mathrm{ch}F=2$，则取 $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$，则 $A^2=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 2 & 2\end{pmatrix}=0$，由 R 的定义知道存在酉矩阵 U,V 使得 $A=U\begin{pmatrix}\sigma_1 & 0\\ 0 & \sigma_2\end{pmatrix}V$，从而 $A^2=AA^*=U\begin{pmatrix}\sigma_1^2 & 0\\ 0 & \sigma_2^2\end{pmatrix}U^*=0$，从而 $\sigma_1=\sigma_2=0$，故 $A=0$，矛盾.

其次，定义 R 上二次型如下：$Q(x)=x\bar{x}$，$\forall\ x\in R$，由 $\mathrm{rad}Q=\{y\in R\,|\,Q(x+y)=Q(x),\forall\ x\in R\}=0$，知 Q 为非退化的二次型，又对$\forall\ x,y\in R$，$Q(xy)=(xy)\overline{(xy)}=x(y\bar{y})\bar{x}=(x\bar{x})(y\bar{y})=Q(x)Q(y)$，故$(R,Q)$为合成代数[4].

最后应用[4]中推广的 Hurwitz 定理即得出必要性的前一部分，后一部分同原文，即可.

3). **所谓 p-除环[5]指的是**：带有对合反自同构 $\sigma:a\to a^\sigma$ 且满足“正性条件”的除环，即对任意中 s 个非零元素 $a_1,a_2,\cdots,a_s$，恒有 $\sum_{i=1}^{s}a_ia_i^\sigma\neq 0$.

在文[3]中有这样一段话：

“对 p-除环上任意 $m\times n$ 阵 A. 可完全模仿复数域上矩阵的奇异值分解的方法，而得到 A 在 Ω 上的奇异值分解：

$$A=U\begin{pmatrix}D & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}(V')^\sigma,D=\mathrm{diag}\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_r\},$$

其中 $\omega_i\neq 0,i=1,2,\cdots,r$，而 U,V 为 Ω 上的酉阵.”

对任意的 p-除环 Ω，并不一定有其对称元素集合 $\Omega^+=\{a\in\Omega\,|\,a^\sigma=a\}$为 Galois 序闭域，故应用文[2]的定理 1，即知上述论断是不正确的.

例 设 Q 为有理数域，$\Omega=Q(i)=\{a+bi\,|\,a,b\in Q,i^2=-1\}$，则 Ω 为一个 p-除环，Q 上对合 $\sigma:a+bi\to a-bi$，从而，$\Omega^+=Q$，但 Q 不是一个 Pythagorean 域，故非 Galois 序闭域，所以 Ω 上矩阵不一定都有奇异值分解. 事实上，取 $1+i\in\Omega$，考虑一阶矩阵 $A=(1+i)$，若 A 有奇异值分解，则存在酉矩阵 U,V 及 $D=(d)$，$d\in Q$，使得 $A=UDV$，从而 $A(A')^\sigma=(UDV)[(UDV)']^\sigma=d^2=(1+i)(1-i)=2$，故 $d=\pm\sqrt{2}\notin Q$，矛盾.

参考文献：

[1] ROWEN L H. *Ring Theory* [M]. Vol. I. Boston, Academic Press, Inc., 1988.

[2] 黄礼平. 具有奇异值分解性质的代数 [J]. 数学学报，1997，**40**(2)：**161－166.**

[3] 屠伯埙. 关于“体上矩阵的广义逆”一文的注 [J]. 数学研究与评论，**1986**，**6**(4)：26.

[4] JACOBSON N. *Basic Algebra I* [M]. San Francisco, W. H. Freeman and Company, 1980, 423－427.

[5] 屠伯埙. p-除环上矩阵的广义逆 [J]. 数学学报，1986，**20**(2)：246－248.