关于矩阵的 Bergstrom 型不等式的修正*

杨　忠　鹏

（吉林师范学院理学分院，吉林 132013）

摘　要：本文指出了[1]中关于实数域上亚正定阵和[3]中关于四元数体上正定自共轭矩阵的 Bergstrom 型不等式推广的错误，同时给出有关结论的正确形式.

关键词：不等式；亚正定阵；重行列式.

分类号：AMS(1991) 15A33,15A57/CLC O151.22

文献标识码：A　　**文章编号**：1000-341X(2000)02-0313-04

1 引　言

设 R,C,Q 分别为实数域，复数域，四元数体. $SC_n(F)$ 为 $F(=R,C,Q)$ 上 $n\times n$ 自共轭矩阵集合，(半)正定的 $A\in SC_n(F)$，也记为 $(A\geqslant 0)A>0$. 矩阵 A 的非奇异 k 阶顺序主子阵 A_k 在 A 中的 Schur 补记为 A/A_k. [1]将 Bergstrom 不等式[2]推广到 $n\times n$ 的亚正定阵类 P_n 得到

命题 1(见[1，定理 4])　设 $A\in LS_n(k)\cap P_n(LS_n(k))$ 为 $n\times n$ 的 k-局部完全对称矩阵集合)，$B(>0)\in SC_n(R)$，则

$$\det(A+B)/(A+B)_k>\det A/A_k+\det B/B_k.$$

命题 2(见[1，系 4.2])　题设同命题 1. 则

$$\det(A+B)>(\det A)[1+(\det B/\det B_k)]+(\det B)[1+(\det A/\det A_k)].$$

[3]仿[1]给出了 Q 上重行列式的"基本不等式"($\det_c A$ 为[3]所用的 $A\in Q^{n\times n}$ 的行列式).

命题 3(见[3，定理 4，系 4.1，系 4.2，系 8.2])　设 $A(>0),B(>0)\in SC_n(Q)$，则

$$\|(A+B)/(A+B)_k\|^{\alpha}\geqslant\|A/A_k\|^{\alpha}+\|B/B_k\|^{\alpha};\tag{1}$$

$$\|A+B\|^{\alpha}/\|A_k+B_k\|^{\alpha}\geqslant\|A\|^{\alpha}/\|A_k\|^{\alpha}+\|B\|^{\alpha}/\|B_k\|^{\alpha};\tag{2}$$

$$\|A+B\|^{\alpha}\geqslant\|A\|^{\alpha}[1+(\|B\|^{\alpha}/\|B_k\|^{\alpha})]+\|B\|^{\alpha}[1+\|A\|^{\alpha}/\|A_k\|^{\alpha})];\tag{3}$$

$$[\det_c(A+B)]^{\alpha}\geqslant(\det_c A)^{\alpha}\{1+[(\det_c B)^{\alpha}/(\det_c B_k)^{\alpha}]\}+(\det_c B)^{\alpha}\{1+[(\det_c A)^{\alpha}/(\det_c A_k)^{\alpha}]\},\tag{4}$$

这里的 $\alpha\geqslant\frac{1}{n}$.

本文目的是指出命题 2 和 3 是错误的，同时给出其正确形式与推广.

* 收稿日期：1997-04-28

作者简介：杨忠鹏(1947-)，男，吉林师范学院教授.

2 有关反例

首先给出命题 2 和(3),(4)的反例.

例 1 设 $A=\mathrm{diag}(1,1,10)\in LS_3(2)$, $B=\mathrm{diag}(1,1,5)$. 则

$$60=\det(A+B)<(\det A)[1+(\det B/\det B_2)]+(\det B)[1+(\det A/\det A_2)]=115,$$

$$60^2=[\det(A+B)]^2<(\det A)^2\{1+[(\det B)^2/(\det B_2)^2]\}+(\det B)^2\{1+[(\det A)^2/(\det A_2)^2]\}=5125.$$

由 $\det_c A=\det A$, $\|A\|=(\det A)^2$ 知命题 2 和(3),(4)都是错误的.

其次给出(1),(2)的反例.

例 2 设 $A=\mathrm{diag}(1,1,1,2/3,3/2)$, $B=\mathrm{diag}(1,1,1,3/2,2/3)$. 则

$$\begin{aligned}\|A+B\|^{1/5}/\|(A+B)_3\|^{1/5}&=\|(A+B)/(A+B)_3\|^{1/5}\\&=(13/6)^{4/5}<2=\|A/A_3\|^{1/5}+\|B/B_3\|^{1/5}\\&=(\|A\|^{1/5}/\|A_3\|^{1/5})+(\|B\|^{1/5}/\|B_3\|^{1/5}).\end{aligned}$$

这表明(1),(2)也是不成立的.

3 主要结论

引理 1[5] 设 $A\in P_n$, $B(>0)\in SC_n(R)$. 则

$$[\det(A+B)]^{2/n}\geqslant(\det A)^{2/n}+(\det B)^{2/n}.$$

引理 2[6] 设 $A(\geqslant0)$, $B(\geqslant0)\in SC_n(C)$ 且 $A_t>0$, $B_t>0$, $t=1,2,\cdots,n-1$. 则

$$\det(A+B)\geqslant(\det A)[1+\sum_{t=1}^{n-1}(\det B_t/\det A_t)]+(\det B)[1+\sum_{t=1}^{n-1}(\det A_t/\det B_t)]+(2^n-2n)(\det A\det B)^{1/2}.$$

定理 1 设 $A\in LS_n(k)\cap P_n$, $B(>0)\in SC_n(R)$. 则

$$[\det(A+B)/(A+B)_k]^{\alpha}\geqslant(\det A/A_k)^{\alpha}+(\det B/B_k)^{\alpha},\quad \alpha\geqslant\min\{2/(n-k),1\};\tag{5}$$

$$[\det(A+B)]^{\alpha}\geqslant(\det A)^{\alpha}\{1+[(\det B_k)^{\alpha}/(\det A_k)^{\alpha}]\}+(\det B)^{\alpha}\{1+[(\det A_k)^{\alpha}/(\det B_k)^{\alpha}]\},\quad \alpha\geqslant\min\{\max\{2/(n-k),2/k\},1\}.\tag{6}$$

证明 由命题 1 和 Jensen 不等式(见[4,(11)])知对(5)只讨论 $\alpha\geqslant2/(n-k)$. 由[1]知 $A/A_k\in P_{n-k}$, $B/B_k>0$ 且 $(A+B)/(A+B)_k-(A/A_k+B/B_k)$ 是亚半正定的. 这样由引理 1 和 Jensen 不等式

$$\begin{aligned}[\det(A+B)/(A+B)_k]^{\alpha}&\geqslant\{[(\det A/A_k)^{\alpha}]^{2/\alpha(n-k)}+[(\det B/B_k)^{\alpha}]^{2/\alpha(n-k)}\}^{\alpha(n-k)/2}\\&\geqslant(\det A/A_k)^{\alpha}+(\det B/B_k)^{\alpha},\end{aligned}$$

即(1)成立. 应用 Schur 补性质, 从(5)和引理 1 可得(6). □

(5)改进了命题 1, 当 $\alpha=1$ 时(6)可修正命题 2.

定理 2 设 $A\in LS_n(k)\cap P_n$，$B(>0)\in SC_n(R)$. 则

$$\det(A+B)\geqslant(\det A)\left[1+\sum_{t=1}^{k}(\det B_t/\det A_t)\right]+(\det B)\left[1+\sum_{t=1}^{k}(\det A_t/\det B_t)\right]+\left[2^{k+1}-2(k+1)\right](\det A\det B)^{1/2}. \tag{7}$$

证明 由 $A_k>0$，$B_k>0$ 和 Schur 补性质，应用命题 2 和引理 2

$$\begin{aligned}\det(A+B)&\geqslant[\det(A_k+B_k)][(\det A/\det A_k)+(\det B/\det B_k)]\\&\geqslant(\det A)\left[1+\sum_{t=1}^{k}(\det B_t/\det A_t)\right]+(\det B)\left[1+\sum_{t=1}^{k}(\det A_t/\det B_t)\right]+\\&\quad(2^k-2k)(\det A_k\det B_k)^{1/2}[(\det A/\det A_k)+(\det B/\det B_k)]+\\&\quad\sum_{t=1}^{k-1}[(\det B_k/\det A_k)(\det A_t/\det B_t)(\det A)+\\&\quad(\det A_k/\det B_k)(\det B_t/\det A_t)(\det B)]\\&\geqslant(\det A)\left[1+\sum_{t=1}^{k}(\det B_t/\det A_t)\right]+(\det B)\left[1+\sum_{t=1}^{k}(\det A_t/\det B_t)\right]+\\&\quad 2(2^k-2k)(\det A\det B)^{1/2}+2(k-1)(\det A\det B)^{1/2},\end{aligned}$$

即知(7)成立. □

(7)不仅极大地加强了(6)，而且也优越于[7]的相应结论.

引理 3(见[4，定理 2]) 设 $A(\geqslant0)$，$B(\geqslant0)\in SC_n(Q)$. 则

$$\|A+B\|^{\alpha}\geqslant\|A\|^{\alpha}+\|B\|^{\alpha},\ \alpha\geqslant1/2n.$$

定理 3 设 $A(>0)$，$B(>0)\in SC_n(Q)$. 则

$$\|(A+B)/(A+B)_k\|^{\alpha}\geqslant\|A/A_k\|^{\alpha}+\|B/B_k\|^{\alpha},\ \alpha\geqslant1/2(n-k); \tag{8}$$

$$\|A+B\|^{\alpha}\geqslant\|A\|^{\alpha}[1+(\|B_k\|^{\alpha}/\|A_k\|^{\alpha})]+\|B\|^{\alpha}[1+(\|A_k\|^{\alpha}/\|B_k\|^{\alpha})],\quad \alpha\geqslant\max\{1/2(n-k),1/2k\}; \tag{9}$$

$$[\det_c(A+B)]^{\alpha}\geqslant(\det_cA)^{\alpha}\{1+[(\det_cB_k)^{\alpha}/(\det_cA_k)^{\alpha}]\}+(\det_cB)^{\alpha}\{1+[(\det_cA_k)^{\alpha}/(\det_cB_k)^{\alpha}]\},\quad \alpha\geqslant\max\{1/(n-k),1/k\}. \tag{10}$$

证明 由[3]知 $(A+B)/(A+B)_k-(A/A_k+B/B_k)\geqslant0$，$(A+B)/(A+B)_k>0$，$A/A_k>0$，$B/B_k>0$. 这样从引理 3 知(8)成立. 进而由[3，定理 1]知，当 $\alpha\geqslant\max\{1/2(n-k),1/2k\}$ 时

$$\begin{aligned}\|A+B\|^{\alpha}&\geqslant\|A_k+B_k\|^{\alpha}(\|A/A_k\|^{\alpha}+\|B/B_k\|^{\alpha})\\&\geqslant(\|A_k\|^{\alpha}+\|B_k\|^{\alpha})[(\|A\|^{\alpha}/\|A_k\|^{\alpha})+(\|B\|^{\alpha}/\|B_k\|^{\alpha})],\end{aligned}$$

即(9)成立. 进而从[4，引理 1]可得(10). □

定理 3 不仅修正了命题 3，而且例 3 表明对任意正定自共轭矩阵而言，(8)中“$1/2(n-k)$”为最小指数.

例 3 设 $A,B=\mathrm{diag}(I_{n-2},J)$，$J=\dfrac{2}{\sqrt5}\begin{pmatrix}3&-2\\-2&3\end{pmatrix}$. 则

$$\|(A+B)/(A+B)_k\|^{\alpha}=2^{2\alpha(n-k)}\geqslant2=\|A/A_k\|^{\alpha}+\|B/B_k\|^{\alpha}.$$

当且仅当 $\alpha\geqslant1/2(n-k)$，这里 $1\leqslant k\leqslant n-2$.

参考文献：

[1] 屠伯埙. 亚正定阵理论(Ⅰ)[J]. 数学学报，1991，**34**(1)：91—102.

[2] HORM R A and JOHNSON C R. Matrix analysis [M]. Cambridge University Press，New York，1985.

[3] 张庆成. 四元数体上重行列式的性质及其应用 [J]. 数学学报，1995，**38**(2)：253—259.

[4] 杨忠鹏. 四元数体上 Minkowski 不等式与 Bergstrom 不等式 [J]. 新疆大学学报(自)，1999，**16**(1)：32—39.

[5] 胡永健，陈公宁. 有关实正定矩阵的一些性质 [J]. 北京师范大学学报(自)，1996，**32**(1)：40—46.

[6] 王松桂，贾忠贞. 矩阵论中不等式 [M]. 合肥：安徽教育出版社，1994.

[7] 谢清明. 亚正定阵的几个开问题及一些不等式 [J]. 数学研究与评论，1998，**18**(1)：155—156.

On the Correction of Inequalities of Bergstrom Type for Matrices

YANG Zhong-peng

(Science Institute，Jilin Teachers' College，Jilin 132013)

Abstract：In this paper we point out some mistakes on generalization of inequalities of Bergstrom type for subpositive definite matrices over the real field in [1] and selfconjugate positive definite matrices over the quaternion field in [3]，at the same time，give correct form of the relevant conclusion.

Key words：inequality；subpositive definite matrix；double derterminat.