三类与 Riemann Zeta 函数有关的级数的求和公式*

党四善， 李国兴
(西北轻工业学院，陕西 咸阳 712081)

摘 要：本文采用组合数学的方法，利用第二类 Stirling 数和 Bernoulli 数给出级数

$$\sum_{k=2}^{\infty}k^m\overline{\zeta}(k)、\sum_{k=1}^{\infty}k^m\overline{\zeta}(2k) 及 \sum_{k=1}^{\infty}(2k+1)^m\overline{\zeta}(2k+1)(其中 m\geqslant 1,\overline{\zeta}(x)=\zeta(x)-1)$$

的求和公式. 这些公式表述简洁并有鲜明的规律性.

关键词：Riemann Zeta 函数；第二类 Stirling 数；Bernoulli 数；求和公式.
分类号：AMS(1991) 11M261/CLC O156.4
文献标识码：A **文章编号**：1000-341X(2000)03-0396-05

1 前 言

Riemann Zeta 函数

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s},\mathrm{Re}(s)>1 \tag{1}$$

在解析数论中占有十分重要的地位. 然而 $\zeta(2k+1)(k=1,2,\cdots)$ 的无理性的证明在几个世纪以来却一直是著名的难题. 直到 1978 年，法国数学家 R. Apèry 才证明了 $\zeta(3)$ 是无理数. 但这个证明无法推广到其他情形[1]. 有鉴于此，人们对研究与 $\zeta(s)$(s 为大于 1 的整数) 有关的一些级数的求和问题表现出极大的兴趣[2][3]. 在这些研究的基础上，文[4] 提出了级数 $\sum_{k=2}^{\infty}k^m\overline{\zeta}(k)$，$\sum_{k=1}^{\infty}k^m\overline{\zeta}(2k)$ 及 $\sum_{k=1}^{\infty}(2k+1)^m\overline{\zeta}(2k+1)$ 的求和问题，并且用求导赋值的方法给出了 $m=1,2,3$ 时级数的和值. 但由于 m 稍大时，使用此法不可避免地会碰到十分浩繁的计算工作，所以难以给出 $m>3$ 时的一般的求和公式. 本文改用组合数学的方法，利用第二类 Stirling 数和 Bernoulli 数给出上述级数关于 m 的求和公式. 这些公式表示简洁并有鲜明的规律性.

本文约定，$\overline{\zeta}(x)=\zeta(x)-1=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^x}$，此外，$[x]_k=x(x-1)\cdots(x-k+1)$ 为下阶乘函数，其它有关符号请参见[4].

2 几个引理

* 收稿日期：1997-07-02；修订日期：1999-12-13
作者简介：党四善(1945-)，男，陕西富平人，教授.

由[5]P30公式易知

引理 1 当 $n\geqslant 2$ 时，

$$\sum_{t=0}^{\infty}\binom{r+t}{r}\frac{1}{n^t}=\frac{1}{(1-\frac{1}{n})^{r+1}},\quad r=0,1,2,\cdots. \tag{2}$$

我们给出下面两个引理

引理 2 1) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{[2k]_{2r}}{(2r)!}\bar{\zeta}(2k)=\zeta(2r)-\frac{1}{2^{2r+2}}$; (3)

2) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{[2k]_{2r+1}}{(2r+1)!}\bar{\zeta}(2k)=\zeta(2r+2)+\frac{1}{2^{2r+3}}$. (4)

引理 3 记 $I_n=\sum_{u=1}^{n}(-1)^u\frac{u!}{2^u}s_2(n,u)$，这里 $s_2(n,u)$ 是第二类 Stirling，则

1) 设 $I_0=1$，则 I_n 的指数型生成函数为 $\frac{2}{1+e^t}$;

2) $p\geqslant 1$ 时，$I_{2p}=0$; (5)

3) $p\geqslant 1$ 时，$I_{2p-1}=\frac{1-2^{2p}}{p}B_{2p}$，这里 B_{2p} 是 Bernoulli 数. (6)

这两个引理在证明本文主要结果及 §4 推导中起到了关键作用.

3 $\sum_{k=2}^{\infty}k^m\bar{\zeta}(k)$ 的求和公式

定理 1 $\sum_{k=2}^{\infty}k^m\bar{\zeta}(k)=1+\sum_{r=2}^{m+1}(r-1)!s_2(m+1,r)\zeta(r)$. (7)

证明 由引理 1，当 $r\geqslant 2$ 时，

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{[k]_r}{r!}\bar{\zeta}(k)&=\sum_{k=2}^{\infty}\binom{k}{r}\bar{\zeta}(k)=\sum_{k=2}^{\infty}\binom{k}{r}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^k}\\&=\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{k=r}^{\infty}\binom{k}{r}\frac{1}{n^k}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^r}\sum_{t=0}^{\infty}\binom{r+t}{r}\frac{1}{n^t}\\&=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^r}\cdot\frac{1}{(1-\frac{1}{n})^{r+1}}=\zeta(r)+\zeta(r+1).\end{aligned}$$

由于 $m\geqslant 1$ 时，$k^m=\sum_{r=1}^{m}s_2(m,r)[k]_r=\sum_{r=1}^{m}(r!s_2(m,r))\frac{[k]_r}{r!}$，因而有

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{\infty}k^m\bar{\zeta}(k)&=\sum_{k=2}^{\infty}[\sum_{r=1}^{m}(r!s_2(m,r))\frac{[k]_r}{r!}]\bar{\zeta}(k)\\&=\sum_{k=2}^{\infty}ks_2(m,1)\bar{\zeta}(k)+\sum_{k=2}^{\infty}[\sum_{r=2}^{m}(r!s_2(m,r))\frac{[k]_r}{r!}]\bar{\zeta}(k)\\&=\sum_{k=2}^{\infty}k\bar{\zeta}(k)+\sum_{r=2}^{m}r!s_2(m,r)\sum_{k=2}^{\infty}\frac{[k]_r}{r!}\bar{\zeta}(k)\end{aligned}$$

$$= \sum_{k=2}^{\infty} k\bar{\zeta}(k) + \sum_{r=2}^{m} r!s_2(m,r)(\zeta(r) + \zeta(r+1)).$$

由于

$$\sum_{k=2}^{\infty} k\bar{\zeta}(k) = \sum_{n=2}^{\infty}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{k}{n^k} = \sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{1}{n}\sum_{t=2}^{\infty}\binom{1+t}{1}\frac{1}{n^t}\right]$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{1}{n}\left[\frac{1}{(1-\frac{1}{n})^2} - 1\right]\right] = 1 + \zeta(2),$$

根据第二类 Stirling 数的递推公式 $s_2(m+1,r) = s_2(m,r-1) + rs_2(m,r)$ 即得

$$\sum_{k=2}^{\infty} k^m\bar{\zeta}(k) = 1 + \zeta(2) + \sum_{r=2}^{m} r!s_2(m,r)(\zeta(r) + \zeta(r+1))$$

$$= 1 + \sum_{r=2}^{m}(r-1)!(s_2(m,r-1) + rs_2(m,r))\zeta(r) + m!s_2(m,m)\zeta(m+1)$$

$$= 1 + \sum_{r=2}^{m}(r-1)!(s_2(m+1,r)\zeta(r) + m!s_2(m+1,m+1)\zeta(m+1)$$

$$= 1 + \sum_{r=2}^{m+1}(r-1)!s_2(m+1,r)\zeta(r).$$

4 $\sum_{r=1}^{\infty}(2k)^m\bar{\zeta}(2k)$ 的求和公式

定理 2 1) 当 $m = 2p(p = 1,2,\cdots)$ 时

$$\sum_{k=1}^{\infty}(2k)^{2p}\bar{\zeta}(2k) = \sum_{r=1}^{p}(2r-1)!s_2(2p+1,2r)\zeta(2r); \tag{8}$$

2) 当 $m = 2p-1(p = 1,2,\cdots)$ 时,

$$\sum_{k=1}^{\infty}(2k)^{2p-1}\bar{\zeta}(2k) = \sum_{r=1}^{p}(2r-1)!s_2(2p,2r)\zeta(2r) + \frac{2^{2p}-1}{4p}B_{2p}. \tag{9}$$

证明 首先有

$$(2k)^m = \sum_{u=1}^{m} s_2(m,u)[2k]_u.$$

1) 当 $m = 2p$ 时,由引理 2 得

$$\sum_{k=1}^{\infty}(2k)^{2p}\bar{\zeta}(2k) = \sum_{u=1}^{2p} u!s_2(2p,u)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{[2k]_u}{u!}\bar{\zeta}(2k)$$

$$= \sum_{r=1}^{p}(2r-1)!s_2(2p,2r-1)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{[2k]_{2r-1}}{(2r-1)!}\bar{\zeta}(2k) +$$

$$\sum_{r=1}^{p}(2r)!s_2(2p,2r)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{[2k]_{2r}}{(2r)!}\bar{\zeta}(2k)$$

$$= \sum_{r=1}^{p}(2r-1)!s_2(2p,2r-1)\left(\zeta(2r) + \frac{1}{2^{2r+2}}\right) +$$

$$\sum_{r=1}^{p}(2r)!s_2(2p,2r)\left(\zeta(2r) - \frac{1}{2^{2r+2}}\right)$$

$$= \sum_{r=1}^{p}(2r-1)![s_2(2p,2r-1)+2rs_2(2p,2r)]\zeta(2r) -$$
$$\frac{1}{4}\sum_{u=1}^{2p}(-1)^u\frac{u!}{2^u}s_2(2p,u)$$
$$= \sum_{r=1}^{p}(2r-1)!s_2(2p+1,2r)\zeta(2r)-\frac{1}{4}I_{2p}$$
$$= \sum_{r=1}^{p}(2r-1)!s_2(2p+1,2r)\zeta(2r).$$

最后一步是根据引理 3 的(5) 式得出的.

2) 当 $m=2p-1$ 时,

$$\sum_{k=1}^{\infty}(2k)^{2p-1}\bar{\zeta}(2k) = \sum_{u=1}^{2p-1}u!s_2(2p-1,u)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{[2k]_u}{u!}\bar{\zeta}(2k)$$
$$= \sum_{r=1}^{p}(2r-1)!s_2(2p-1,2r-1)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{[2k]_{2r-1}}{(2r-1)!}\bar{\zeta}(2k)+$$
$$\sum_{r=1}^{p-1}(2r)!s_2(2p-1,2r)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{[2k]_{2r}}{(2r)!}\bar{\zeta}(2k)$$
$$= \sum_{r=1}^{p}(2r-1)!s_2(2p-1,2r)\left(\zeta(2r)+\frac{1}{2^{2r+1}}\right)+$$
$$\sum_{r=1}^{p-1}(2r)!s_2(2p-1,2r)\left(\zeta(2r)-\frac{1}{2^{2r+2}}\right)$$
$$= \sum_{r=1}^{p-1}(2r-1)![s_2(2p-1,2r-1)+2rs_2(2p-1,2r)]\zeta(2r)+$$
$$(2p-1)!s_2(2p-1,2p-1)\zeta(2p)-\frac{1}{4}\sum_{u=1}^{2p-1}\frac{(-1)^u u!}{2^u}s_2(2p-1,u)$$
$$= \sum_{r=1}^{p-1}(2r-1)!s_2(2p,2r)\zeta(2r)+(2p-1)!s_2(2p,2p)\zeta(2p)-\frac{1}{4}I_{2p-1}$$
$$= \sum_{r=1}^{p}(2r-1)!s_2(2p,2r)\zeta(2r)+\frac{2^{2p}-1}{4p}B_{2p}.$$

5 $\sum_{k=1}^{\infty}k^m\bar{\zeta}(2k)$ 和 $\sum_{k=1}^{\infty}(2k+1)^m\bar{\zeta}(2k+1)$ 的求和公式

由定理 2 易得

定理 3 1) 当 $m=2p(p=1,2,\cdots)$ 时,

$$\sum_{k=1}^{\infty}k^{2p}\bar{\zeta}(2k)=\frac{1}{2^{2p}}\sum_{r=1}^{p}(2r-1)!s_2(2p+1,2r)\zeta(2r); \tag{10}$$

2) 当 $m=2p-1(p=1,2,\cdots)$ 时,

$$\sum_{k=1}^{\infty}k^{2p-1}\bar{\zeta}(2k)=\frac{1}{2^{2p-1}}\sum_{r=1}^{p}(2r-1)!s_2(2p,2r)\zeta(2r)+\frac{1-2^{2p}}{2^{2p+1}p}B_{2p}. \tag{11}$$

比较定理 1 和定理 2 可知

定理 4 1) 当 $m=2p(p=1,2,\cdots)$ 时，

$$\sum_{k=1}^{\infty}(2k+1)^{2p}\bar{\zeta}(2k+1)=1+\sum_{r=1}^{p}(2r)!s_2(2p+1,2r+1)\zeta(2r+1); \qquad (12)$$

2) 当 $m=2p-1(p=1,2,\cdots)$ 时，

$$\sum_{k=1}^{\infty}(2k+1)^{2p-1}\bar{\zeta}(2k+1)=1+\sum_{r=1}^{p}(2r)!s_2(2p,2r-1)\zeta(2r-1)+\frac{1-2^{2p}}{4p}B_{2p} \qquad (13)$$

参考文献：

[1] Alfred van der Poorten. Euler 错过了的证明，数学译林，1980，**2**：47—43.

[2] LEHMER D H. *Interesting series involving the central binomial coefficient* [J]. The American Math Monthly，1985，**92**：449—457.

[3] E3103 [1985，507]. *An old sum reappears* [J]：The American Math Monthly，1987，**94**：466—468.

[4] 吴云飞. 与 Riemann Zeta 函数有关的一些级数和 [J]. 数学的实践与认识 [J]. 1990，**3**：82—86.

[5] 华罗庚. 从杨辉三角谈起 [M]. 北京：人民教育出版社，1964.

Summation Formulas of Three Types of Series Concerning Riemann Zeta Function

DANG Si-shan，　LI Guo-xing

(Northwest Institute of Light Industry，Xianyang 712081，China)

Abstract：In this paper，by means of combinatorial mathematics and using Stirling number of second kind and Bernoulli number summation formulas of series $\sum_{k=2}^{\infty}k^m\bar{\zeta}(k)$，$\sum_{k=1}^{\infty}k^m\bar{\zeta}(2k)$ *and* $\sum_{k=1}^{\infty}(2k+1)^m\bar{\zeta}(2k+1)$ (*where* $m\geqslant 1$，$\bar{\zeta}(x)=\zeta(x)-1$) arc given. These formulas are succinct expressed and they have clear—cut regularity.

Key words：Riemman Zeta function；Stirling number of second kind；Bernoulli number；Summation formula.