第20卷第3期
2000年8月
数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION
Vol. 20 No. 3
Aug. 2000

一类高阶方程的中量定理及其逆定理*

同小军[1,2]， 同登科[1]， 陈绵云[2]

(1. 石油大学应用数学系，山东 东营 257062；2. 华中理工大学自控系，武汉 430074)

摘　要：本文对于高阶方程

$$\left(\sum_{i=1}^{m_1}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}-\sum_{j=1}^{m_2}\frac{\partial^2}{\partial y_j^2}\right)^2 u=0 \tag{1}$$

在文[2]中量定义的基础上，利用 Asgeirsson 中量定理，得到了中量所满足的方程，即 $M(r,s)+M(s,r)$ 满足 E-P-D 方程，同时也证明了其逆定理也成立.

关键词：Asgeirsson 中量定理；Euler-Poisson-Darboux 方程；超双曲型方程.

分类号：AMS(1991) 35L/CLC O175.27

文献标识码：A　　　　**文章编号**：1000-341X(2000)03-0401-05

1 引　言

著名的 Asgeirsson 中量定理使人们认识到超双曲方程$(\Delta_x-\Delta_y)u=0$ 的 Cauchy 问题一般是不适定的，并且还可以用来证明超双曲型方程解具有奇特的拓展性[1]. 因此，对 Asgeirsson 中量定理的进一步推广具有一定的意义. 凌岭等利用发散积分的有限部分这一工具，得到了一些重要的结果[2,3]. 本文则是直接利用 Asgeirsson 中量定理，对方程(1)进行了讨论，得到了 $M(r,s)+M(s,r)$满足 E-P-D 方程，即是下列问题的解(方程(1)在 $m_1=m_2=m$ 条件下)

$$\begin{cases}u_{rr}-u_{ss}+\dfrac{m-1}{r}u_r-\dfrac{m-1}{s}u_s=0,\\ u_r|_{r=0}=u_s|_{s=0}=0.\end{cases}$$

本文还证明了其逆定理成立，当然这一点要比 Asgeirsson 逆定理的证明要困难得多. 对于 $m_1\neq m_2$，可以利用文[1]的方法得到类似结论. 这儿不再赘述. 本文的结论使人们看到了方程(1)与超双曲型方程共性一面.

2 主要结论

以下只讨论 $m_1=m_2=m$ 情形，对 $m_1\neq m_2$ 可通过文[1]中升维的方法类似得到.

* **收稿日期**：1997-11-14

基金项目：国家自然科学基金资助项目(79970025)；国防基金资助项目(98J.6.3.4.Jwo507)

作者简介：同小军(1967-)，男，硕士，讲师.

引理 设 R_{2m} 是 $2m$ 维空间内一闭单联域，u 是 $\left(\sum\limits_{i=1}^{m}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}-\sum\limits_{j=1}^{m}\frac{\partial^2}{\partial y_j^2}\right)u=0$ 在 R_{2m} 内的正规解，$(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_m^0,y_1^0,y_2^0,\cdots,y_m^0)$ 是 R_{2m} 内任一内点，t_0 是使域

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{m}(x_i-x_i^0)^2}+\sqrt{\sum_{j=1}^{m}(y_j-y_j^0)^2}\leqslant t_0$$

整个在 R_{2m} 内的正数，则当 ρ,σ 是适合不等式 $\rho+\sigma\leqslant t_0$ 的任一对正数时，u 在

$$\sum_{i=1}^{m}(x_i-x_i^0)^2=\rho^2,\sum_{j=1}^{m}(y_j-y_j^0)^2=\sigma^2$$

上中量等于它在 $\sum\limits_{i=1}^{m}(x_i-x_i^0)^2=\sigma^2,\sum\limits_{j=1}^{m}(y_j-y_j^0)^2=\rho^2$ 上的中量. 即中量 M 是 ρ,σ 的对称函数，$M(\rho,\sigma)=M(\sigma,\rho)$（这就是著名的 Asgeirsson 中量定理，其证明见文[1][2][3]）

定理 1 设 R_{2m} 是 $2m$ 维空间内一闭单联域，u 是方程(1)在 R_{2m} 内的正规解，$m\geqslant 2$，$(x_1^0,x_2^0.\cdots,x_m^0;y_1^0,y_2^0,\cdots y_m^0)R_{2m}$ 内任一内点，t_0 是使域

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{m}(x_i-x_i^0)^2}+\sqrt{\sum_{j=1}^{m}(y_j-y_j^0)^2}\leqslant t_0$$

整个在 R_{2m} 内的正数，则当 r,s 是适合不等式 $r+s\leqslant t_0$ 的任一对正数时，有

$$[M(r,s)+M(s,r)]_{rr}-[M(s,r)+M(r,s)]_{ss}+\frac{m-1}{r}[M(r,s)+M(s,r)]_r$$

$$\left.\begin{aligned}&-\frac{m-1}{s}[M(r,s)+M(s,r)]_s=0\\&\text{且}[M(r,s)+M(s,r)]_r|_{r=0}=0\\&[M(r,s)+M(s,r)(s,r)]_s|_{s=0}=0\end{aligned}\right\}\qquad(2)$$

即 $M(r,s)+M(s,r)$ 满足 E-P-D 方程，其中 $M(r,s)=\int\limits_{\Omega_\alpha}\cdots\int\int\limits_{\Omega\beta}\cdots\int u(x_i^0+r\alpha_i,y_i^0+s\beta_i)\,\mathrm{d}\Omega_\alpha\mathrm{d}\Omega_\beta$，$\Omega_\alpha,\Omega_\beta$ 为单位 m 维超球面.

定理 2 设 $(x_1^0,x_2^0,\cdots x_m^0,y_1^0,y_2^0,\cdots y_m^0)$ 是闭单联域 R_{2m} 内任一内点，t_0 的要求如定理 1，r,s 是适合不等式 $r+s\leqslant t_0$ 的任一对正数，在 R_{2m} 内为正规函数 u 适合问题(2)，则 u 在 R_{2m} 内是方程(1)的解.

3 定理的证明

定理 1 的证明 方程(1)对于正规解 u 可写为

$$\left[\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}-\frac{\partial^2}{\partial y_j^2}\right)\right]\left[\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}-\frac{\partial^2}{\partial y_j^2}\right)u\right]=0,$$

即 $\sum\limits_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}-\frac{\partial^2}{\partial y_i^2}\right)u=0$ 是超双曲型方程 $\sum\limits_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}-\frac{\partial^2}{\partial y_i^2}\right)u=0$ 的解，则由引理有

$$\int\limits_{\Omega_\alpha}\cdots\int\int\limits_{\Omega_\beta}\cdots\int\left[\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}-\frac{\partial^2}{\partial y_i^2}\right)u\right](x_i^0+r_1\alpha_i,y_i^0+s_1\beta_i)\mathrm{d}\Omega_\alpha\mathrm{d}\Omega_\beta$$

$$=\int\cdots\int_{\Omega_\alpha}\int\cdots\int_{\Omega_\beta}\left[\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}-\frac{\partial^2}{\partial y_i^2}\right)u\right](x_i^0+s_1\alpha_i,y_i^0+r_1\beta_i)\mathrm{d}\Omega_\alpha\Omega_\beta.$$

上式两边乘以 r^{m-1},s^{m-1}可得

$$\int\cdots\int_{\substack{\sum_{i=1}^{m}(x_i-x_i^0)^2=r_1^2\\ \sum_{i=1}^{m}(y_i-y_j^0)^2=s_1^2}}\left[\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}-\frac{\partial^2}{\partial y_j^2}\right)u(x_1,x_2,x_m,y_1,y_2,\cdots y_m)\right]\mathrm{d}s_x\mathrm{d}s_y$$

$$=\int\cdots\int_{\substack{\sum_{i=1}^{m}(x_i-x_i^0)^2=s_1^2\\ \sum_{j=1}^{m}(y_j-y_j^0)^2=r_1^2}}\left[\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}-\frac{\partial^2}{\partial y_j^2}\right)u(x_1,x_2,\cdots,x_m,y_1,y_2,\cdots,y_m)\right]\mathrm{d}s_x\mathrm{d}s_y.$$

上式分别关于 r_1,s_1 从 0 到 r,从 0 到 s 积分得

$$\int\cdots\int\cdots\int_{\substack{\sum_{i=1}^{m}(x_i-x_i^0)^2\leqslant r^2\\ \sum_{j=1}^{m}(y_j-y_j^0)^2\leqslant s^2}}\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}-\frac{\partial^2}{\partial y_i^2}\right)u(x_1,\cdots,x_m,y_1,\cdots y_m)\mathrm{d}v_x\mathrm{d}v_y$$

$$=\int\cdots\int\cdots\int_{\substack{\sum_{i=1}^{m}(x_i-x_i^0)^2\leqslant s^2\\ \sum_{j=1}^{m}(y_j-y_i^0)^2\leqslant r^2}}\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}-\frac{\partial^2}{\partial y_i^2}\right)u(x_1,\cdots,x_m,y_1,\cdots y_m)\mathrm{d}v_x\mathrm{d}v_y. \tag{3}$$

由格林公式,(3)式可化为

$$\int\cdots\int_{s_{11}}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\vec{n}}+\int\cdots\int_{s_{12}}-\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\vec{n}}\mathrm{d}s=\int\cdots\int_{s_{21}}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\vec{n}}ds+\int\cdots\int_{s_{22}}-\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\vec{n}}\mathrm{d}s, \tag{4}$$

$s_{11}:\{x\,|\,|x-x_0|=r\}\times\{y\,|\,|y-y_0|\leqslant s\}$, $s_{12}:\{x\,|\,|x-x_0|\leqslant r\}\times\{y\,|\,|y-y_0|=s\}$,

$s_{21}:\{x\,|\,|x-x_0|=s\}\times\{y\,|\,|y-y_0|\leqslant r\}$, $s_{22}:\{x\,|\,|x-x_0|\leqslant s\}\times\{y\,|\,|y-y_0|=r\}$,

其中 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_m)$, $y=(y_1,y_2,\cdots,y_m)$.

本文给出 $\int\cdots\int_{s_{11}}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\vec{n}}\mathrm{d}s$ 的具体变化式,其余可得出类似表达式

$$\int\cdots\int_{s_{11}}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\vec{n}}\mathrm{d}s=-\int_0^s\sigma^{m-1}\mathrm{d}\sigma\int\cdots\int_{\Omega_\beta}\left(r^{m-1}\int\cdots\int_{\Omega_\alpha}\frac{\partial u}{\partial r}\mathrm{d}\Omega_\alpha\right)\mathrm{d}\Omega_\beta$$

$$=-\int_0^s\sigma^{m-1}r^{m-1}\frac{\partial M(r,\sigma)}{\partial r}\mathrm{d}\sigma,$$

从而(4)式可化为

$$\int_0^s\sigma^{m-1}r^{m-1}\frac{\partial M(r,\sigma)}{\partial r}\mathrm{d}\sigma-\int_0^r\sigma^{m-1}s^{m-1}\frac{\partial M(\sigma,s)}{\partial s}\mathrm{d}\sigma$$

$$=-\int_0^s\sigma^{m-1}r^{m-1}\frac{\partial M(\sigma,r)}{\partial r}d\sigma+\int_0^r\sigma^{m-1}s^{m-1}\frac{\partial M(s,\sigma)}{\partial s}d\sigma. \tag{5}$$

(5)式两边关于 r,s 各求偏导一次可得

$$\begin{aligned}&r^{m-1}s^{m-1}M_{rr}(r,s)+(m-1)r^{m-2}s^{m-1}M_r(r,s)-r^{m-1}s^{m-1}M_{ss}(r,s)-(m-1)r^{m-1}s^{m-2}M_s(r,s)\\&=-[r^{m-1}s^{m-1}M_{rr}(s,r)+(m-1)r^{(m-2)}s^{m-1}M_r(s,r)-r^{m-1}s^{m-1}M_{ss}(s,r)-\\&\quad(m-1)r^{m-1}s^{m-2}M_s(s,r)].\end{aligned}$$

上式两边同除以 $r^{m-1}s^{m-1}$整理后可得

$$\begin{aligned}&[M(r,s)+M(s,r)]_{rr}+\frac{m-1}{r}[M(r,s)+M(s,r)]_r-[M(r,s)+M(s,r)]_{ss}-\\&\frac{m-1}{s}[M(r,s)+M(s,r)]_s=0,\end{aligned}$$

且由 $M(r,s)$关于 r,s 是偶函数,故

$$[M(r,s)+M(s,r)]_r|_{r=0}=[M(r,s)+M(s,r)]_s|_{s=0}=0.$$ □

定理 2 的证明 如果正规函数 u 满足定理 2 的条件,则

$$\begin{aligned}&-\int_V\cdots\int\left\{\sum_{i=1}^m\left(\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}-\frac{\partial^2}{\partial y_i^2}\right)\right]\left[\sum_{i=1}^m\left(\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}-\frac{\partial^2}{\partial y_i^2}\right)u\right]dv\\&=r^{m-1}\int_0^s\sigma^{m-1}\frac{\partial M_1(r,\sigma)}{\partial r}d\sigma-s^{m-1}\int_0^r\rho^{m-1}\frac{\partial M_1(\rho,s)}{\partial s}d\rho,\end{aligned} \tag{6}$$

其中 v 取为

$$\left\{x\,|\sum_{i=1}^m(x_i-x_i^0)^2\leqslant r^2\right\}\{y\,|\sum_{i=1}^m(y_i-y_i^0)^2\leqslant s^2\},$$

而

$$M_1(r,s)=\int_{\Omega_\sigma}\cdots\int\int_{\Omega_\beta}\cdots\int\left[\sum_{i=1}^m\left(\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}-\frac{\partial^2}{\partial y_i^2}\right)u\right](x_i^0+r\sigma_i,y_i^0+s\beta_i)d\Omega_\sigma d\Omega_\beta.$$

令(6)式中 $r=s$ 且注意到

$$\begin{aligned}M_1(r,s)&=r^{1-m}s^{1-m}\frac{\partial^2}{\partial_r\partial_s}\underset{\substack{\sum_{i=1}^m(x_i^0-x_i)^2\leqslant r^2\\\sum_{i=1}^m(y_i-y_i^0)^2\leqslant s^2}}{\int\cdots\int}\sum_{i=1}^m\left(\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}-\frac{\partial^2}{\partial y_i^2)}\right)u(x_1,\cdots,x_m,y_1,\cdots,y_m)dv\\&=-r^{1-m}s^{1-m}r^{m-1}s^{m-1}\left[M_{rr}(r,s)+\frac{m-1}{r}M_r(r,s)-M_{ss}(r,s)-\frac{m-1}{s}M_s(r,s)\right]\\&=-\left[M_{rr}(r,s)+\frac{m-1}{r}M_r(r,s)-M_{ss}(r,s)-\frac{m-1}{s}M_s(r,s)\right],\end{aligned}$$

从而(6)式可化为

$$\begin{aligned}&\int_v\cdots\int\left[\sum_{i=1}^m\left(\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}-\frac{\partial^2}{\partial y_i^2}\right)\right]\left[\sum_{i=1}^m\left(\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}-\frac{\partial^2}{\partial y_i^2}\right)u\right]dv\\&=r^{m-1}\int_0^r\sigma^{m-1}\frac{\partial}{\partial r}\left[M_{rr}(r,\sigma)+\frac{m-1}{r}M_r(r,\sigma)-M_{\sigma\sigma}(r,\sigma)-\frac{m-1}{\sigma}M_\sigma(r,\sigma)\right]d\sigma\\&+r^{m-1}\int_0^r\sigma^{m-1}\frac{\partial}{\partial r}\left[M_{rr}(\sigma,r)+\frac{m-1}{r}M_r(\sigma,r)-M_{\sigma\sigma}(\sigma,r)-\frac{m-1}{\sigma}M_\sigma(\sigma,r)\right]d\sigma\end{aligned}$$

$$= r^{m-1}\int_0^r \sigma^{m-1}\frac{\partial}{\partial r}\Big\{[M(r,\sigma)+M(\sigma,r)]_{rr}+\frac{m-1}{r}[M(r,\sigma)+M(\sigma,r)]_r-$$
$$[M(r,\sigma)+M(\sigma,r)]_{\sigma\sigma}-\frac{m-1}{\sigma}[M(r,\sigma)+M(\sigma,r)]_\sigma\Big\}\mathrm{d}\sigma. \tag{7}$$

由定理 2 的条件可知 $M(r,\sigma)+M(\sigma,r)$满足 E-P-D 方程，即(7)式右端大括号内部分为零. 故由(7)式知

$$\int\cdots\int_v\Big[\sum_{i=1}^m\Big(\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}-\frac{\partial^2}{y_i^2}\Big)\Big[\sum_{i=1}^m\Big(\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}-\frac{\partial^2}{\partial y_i^2}\Big)\Big]u\mathrm{d}v\equiv 0,$$

这表示(6)式对任何 r 为零. 从而可以推知在点$(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_m^0,y_1^0,y_2^0,\cdots,y_m^0)$处有

$$\Big[\sum_{i=1}^m\Big(\frac{\partial^2}{\partial y_i^2}-\frac{\partial^2}{\partial y_i^2}\Big)\Big]^2u=0.$$

又由$({}_1^0,x_2^0,\cdots,x_m^0,y_1^0,y_2^0,\cdots,y_m^0)$的一般性，故在 R_{2m}内 $\hat{u}$ 是方程(1)的解. □

参考文献:

[1] 柯朗 R，希尔伯特 D. 数学物理方法(Ⅰ)[M]. 熊振翔，杨应辰. 北京：科学出版社，1981，613—626.

[2] 凌 岭，耿 光. 超双曲型方程的基本解与 Asgeirsson 定理 [J]. 数学学报，1983，26(1)：108—113.

[3] 凌 岭. 超双曲型方程 [M]. 西安：西北大学出版社，1985，108—118.

The Mean Value Theorem and Converse Theorem of One Class High Order Partial Differential Equations

TONG Xiao-jun[1,2], TONG Deng-ke[1], CHEN Mian-yun[2]

(1. University of Petroleum, Dongying, 257062, China;

2. Huazhong University of Science and Technology, Wuhan 430074, China)

Abstract: In this paper, we applied the different method, disgussed the partial differential equation of the fouth order

$$\Big(\sum_{i=1}^{m_1}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}-\sum_{j=1}^{m_2}\frac{\partial^2}{\partial y_i^2}\Big)^2u=0,$$

and proved the mean value of this equation's solution satisfied E-P-D equation and proved coverse conclusion, too.

Key words: asgeirsson mean; value theorem; E-P-D equation; ultrhyperbolic equation.