第20卷第3期 数学研究与评论 Vol. 20 No. 3
2000年8月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Aug. 2000

n阶泛函微分方程边值问题*

鲁 世 平
(安徽师范大学数学系，芜湖 241000)

摘 要：本文研究下列 n 阶 RFDE 边值问题：

$$x^{(n)}(t)=f(t,x_t,x(t),x'(t),\cdots,x^{(n-1)}(t)),\quad t\in[0,T],$$

$$\begin{cases}x(t)=\varphi(t), & t\in[-r,0]\\ x'(0)=\eta,x''(0)=\eta_2,\cdots,x^{(n-2)}(0)=\eta_{n-2},x^{(j)}(T)=A,\end{cases}$$

其中 $j\in I=\{0,1,2,\cdots,n-1\}$，得到了解的存在性和唯一性新的结果.

关键词：边值问题；初值问题；存在唯一性.
分类号：AMS(1991) 34B15,34K05/CLC O175.8
文献标识码：A **文章编号**：1000-341X(2000)03-0411-05

1 引 言

关于二阶泛函微分方程边值问题的研究已有大量结果[1,2]. 而关于三阶以上泛函微分方程边值问题的的研究尚不多见，文[3]研究了一类 n 阶泛函微分方程边值问题：

$$(\rho(t)x^{(n-1)}(t))'=f(t,x_t,x(t),x'(t),\cdots,x^{(n-1)}(t)),\tag{1.1}$$

$$\left.\begin{aligned}&x(t)=\varphi(t),\quad t\in[-r,0],\\&x'(0)=\eta_1,x''(0)=\eta_2,\cdots,x^{(n-2)}(0)=\eta_{n-2}\quad x(T)=A,\end{aligned}\right\}\tag{1.2}$$

得到了解的存在性的有关结果. 但该文结果繁杂，难于验证. 文[4]利用不动点原理研究了边值问题(1.1)～(1.2)，得到了有关解的存在性和唯一性的新的结果，但该文要求 f 关于各变元为次线性的. 本文继续研究 n 类 n 阶泛函微分方程边值问题.

$$x^{(n)}(t)=f(t,x_t,x(t),x'(t),\cdots,x^{(n-1)}(t)),\qquad t\in[0,T],\tag{1.3}$$

$$\left.\begin{aligned}&x(t)=\varphi(t),\quad t\in[-r,0],\\&x'(0)=\eta_1,x''(0)=\eta_2,\cdots,x^{(n-2)}(0)=\eta_{n-2}\quad x^{(j)}(T)=A,\end{aligned}\right\}\tag{1.4$_j$}$$

其中：$j\in I$，$f(t,\varphi,x_1,\cdots,x_{n-1})$ 是 $S=[0,T]\times C_r\times R^n$ 上的连续泛函，$C_r=C_{([-r,0],R)}$. 对给定的 $x(t)\in C_{[-r,T]}$，令 $x_t(\theta)=x(t+\theta)$，$\theta\in[-r,0]$. 显然 $x_t(\theta)\in C_r$. 对给定的 $\varphi_1(\theta),\varphi_2(\theta)\in C_r$，若对 $\forall\ \theta\in[-r,0]$ 均有 $\varphi_1(\theta)\geqslant\varphi_2(\theta)$，称 $\varphi_1(\cdot)\geqslant\varphi_2(\cdot)$. 利用微分不等式原理及初值问题解的基本理论对边值问题(1.3)～(1.4)$_j$ 进行了研究，得到了解的存在唯一性新的判别方法，所得

* 收稿日期：1997-09-15；修订日期：1999-05-25
基金项目：安徽省教委科研基金资助课题(98JL129)
作者简介：鲁世平(1962-)，男，硕士，讲师.

结果简单,容易验证.

2 主要引理

引理 1 设 $x(t)$是下列微分不等式

$$\begin{cases} x''(t)+Mx'(t)+Nx(t)\geqslant 0, & (2.1)\\ x(0)=0,x'(0)=\gamma & (2.2)\end{cases}$$

的解,若 $M^2-4N>0$,则当 $N\leqslant 0$ 或 $N>0,M<0$ 时,有:

$$x(t)\geqslant \frac{\gamma}{\lambda_2-\lambda_1}(e^{\lambda_2 t}-e^{\lambda_1 t}),$$

$$x'(t)\geqslant \frac{\gamma}{\lambda_2-\lambda_1}(\lambda_2 e^{\lambda_2 t}-\lambda_1 e^{\lambda_1 t}),$$

其中,λ_1,λ_2 是代数方程:$\lambda^2+M\lambda+N=0$ 的两不等实根.

证明 设 $x(t)$ 是微分不等式(2.1)-(2.2)的解,并令 $f(t)\geqslant 0$ 满足:

$$\begin{cases} x''(t)+Mx'(t)+Nx(t)=f(t), & (2.3)\\ x(0)=0,x'(0)=\gamma. & (2.4)\end{cases}$$

易得 Cauchy 问题(2.3)～(2.4)的解 $x(t)$ 为:

$$x(t)=\frac{\gamma}{\lambda_2-\lambda_1}(e^{\lambda_2 t}-e^{\lambda_1 t})+\int_0^t \frac{e^{\lambda_2 t}e^{\lambda_1 \tau}-e^{\lambda_1 t}e^{\lambda_2 \tau}}{(\lambda_2-\lambda_1)e^{(\lambda_1+\lambda_2)\tau}}f(\tau)\mathrm{d}\tau, \tag{2.5}$$

$$x'(t)=\frac{\gamma}{\lambda_2-\lambda_1}(\lambda_2 e^{\lambda_2 t}-\lambda_1 e^{\lambda_1 t})+\int_0^t \frac{\lambda_2 e^{\lambda_2 t}e^{\lambda_1 \tau}-\lambda_1 e^{\lambda_1 t}e^{\lambda_2 \tau}}{(\lambda_2-\lambda_1)e^{(\lambda_1+\lambda_2)\tau}}f(\tau)\mathrm{d}\tau. \tag{2.6}$$

考虑到

$$f(\tau)\geqslant 0,\frac{e^{\lambda_2 t}e^{\lambda_1 \tau}-e^{\lambda_1 t}e^{\lambda_2 \tau}}{(\lambda_2-\lambda_1)e^{(\lambda_1+\lambda_2)\tau}}\geqslant 0,\qquad \tau\in[0,t]$$

和

$$\frac{\lambda_2 e^{\lambda_2 t}e^{\lambda_1 \tau}-\lambda_1 e^{\lambda_1 t}e^{\lambda_2 \tau}}{(\lambda_2-\lambda_1)e^{(\lambda_1+\lambda_2)\tau}}\geqslant 0,\qquad \tau\in[0,t],$$

故由(2.5)和(2.6)易得:$x(t)\geqslant\frac{\gamma}{\lambda_2-\lambda_1}(e^{\lambda_2 t}-e^{\lambda_1 t}),x'(t)\geqslant\frac{\gamma}{\lambda_2-\lambda_1}(\lambda_2 e^{\lambda_2 t}-\lambda_1 e^{\lambda_1 t})$.

类似可得

引理 2 设 $x(t)$是微分不等式(2.1)～(2.2)的解.

若 $M^2-4N=0$,则当 $M<\frac{2}{T}$时有

$$x(t)\geqslant\gamma t e^{-\frac{Mt}{2}},\qquad t\in[0,T],$$

$$x'(t)\geqslant\gamma(1-\frac{M}{2}t)e^{-\frac{Mt}{2}},\qquad t\in[0,T].$$

引理 3 设 $x(t)$是微分不等式(2.1)～(2.2)的解,若 $M^2-4N<0$,则当 $\frac{\sqrt{4N-M^2}}{2}T+\arccos\frac{-M}{2N}\in(0,\pi)$ 时,有

$$x(t)\geqslant\frac{2\gamma}{\sqrt{4N-M^2}}e^{-\frac{M}{2}t}\sin\frac{\sqrt{4N-M^2}}{2}t,\qquad t\in[0,T],$$

$$x'(t)\geqslant\gamma\frac{2N}{\sqrt{4N-M^2}}e^{-\frac{M}{2}t}\sin(\frac{\sqrt{4N-M^2}}{2}t+\varphi_0),\qquad t\in[0,T],$$

其中 $\varphi_0=\arccos\frac{-M}{2N}$.

3 主要结果

定理 1 设 $n\geqslant 3$,若下列条件均满足:

Ⅰ:$f(t,\varphi,x_0,x_1,\cdots,x_{n-3},x_{n-2},x_{n-1})$ 关于 $\varphi,x_0,x_1,\cdots,x_{n-3}$ 为不减;

Ⅱ:$f(t,\varphi,x_0,x_1,\cdots,x_{n-3},x_{n-2},x_{n-1})$ 关于 x_{n-2},x_{n-1} 连续可微,且分别存在常数 M,N. 使得 $\forall\ t\in[0,T],\varphi\in C_r,(x_0,x_1,\cdots,x_{n-2},x_{n-1})\in R^n$ 时有:

$$\frac{\partial f}{\partial x_{n-2}}\geqslant -N,\quad \frac{\partial f}{\partial x_{n-1}}\geqslant -M;$$

Ⅲ:对 $\forall\ \varphi(t)\in C_r,(C_1,C_2,\cdots,C_{n-1})\in R^{n-1}$,Cauchy 问题:

$$x^{(n)}(t)=f(t),x_t,x(t),x'(t),\cdots,x^{n-1}(t)),\tag{3.1}$$

$$\left.\begin{aligned}&x(t)=\varphi(t),\quad t\in[-r,0],\\&x'(0)=C_1,x''(0)=C_2,\cdots,x^{(n-1)}(0)=C_{n-1}\end{aligned}\right\}\tag{3.2}$$

在 $[0,T]$ 上存在唯一解.

则当 $M^2-4N>0$,且条件:$N\leqslant 0$ 或 $N>0,M<0$ 满足时,对 $\forall\ \varphi(\cdot)\in C_r,(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{n-2})\in R^{n-2},A\in R,j\in I$,边值问题 $(1.3)\sim(1.4)_j$ 存在唯一解.

证明 设 $x(t,\Gamma_1)$ 为 Cauchy 问题:

$$x^{(n)}(t)=f(t,x_t,x(t),x'(t),\cdots,x^{(n-1)}(t)),\tag{3.3}$$

$$\left.\begin{aligned}&x(t)=\varphi(t),t\in[-r,0],\\&x'(0)=\eta_1,\cdots,x^{(n-2)}(0)=\eta_{n-2},x^{(n-1)}(0)=\Gamma_1,\end{aligned}\right\}\tag{3.4}$$

定义在 $[0,T]$ 上的解. 取 $\Gamma_2>\Gamma_1$,并令 $z(t)=x(t,\Gamma_2)-x(t,\Gamma_1)$,则 $z(t)$ 满足:

$$\begin{aligned}z^{(n)}(t)=&f(t,z_t+x_t(\cdot,\Gamma_1),z(t)+x(t,\Gamma_1),\cdots,z^{(n-1)}(t)+x^{(n-1)}(t,\Gamma_1))-\\&f(t,x_t(\cdot,\Gamma_1),x(t,\Gamma_1),x'(t,\Gamma_1),\cdots,x^{(n-1)}(t,\Gamma_1)),\end{aligned}\tag{3.5}$$

$$\left.\begin{aligned}&z(t)=0,\qquad t\in[-r,0],\\&z'(0)=z''(0)=\cdots=z^{(n-2)}(0)=0,z^{(n-1)}(0)=\Gamma_2-\Gamma_1>0,\end{aligned}\right\}\tag{3.6}$$

由(3.6)易得 $\exists\ \delta>0$,使得当 $t\in(0,\delta]$ 时,$z(t)>0,z'(t)>0,\cdots,z^{(n-1)}(t)>\frac{m}{2}(\Gamma_2-\Gamma_1)$,

其中 $m=\min\{1,\inf\limits_{t\in[0,T]}\frac{1}{\lambda_2-\lambda_1}\lambda_2e^{\lambda_2t}-\lambda_1e^{\lambda_1t})\}$,$\lambda_2,\lambda_1$ 是方程 $\lambda^2+M\lambda+N=0$ 的两不等实根.

令 t_0 为当 $t\in(0,t_0)$ 时有 $z(t)>0,z'(t)>0,\cdots,z^{(n-2)}(t)>0$,

$$z^{(n-1)}(t)>\frac{m}{2}(\Gamma_2-\Gamma_1)\text{且 }z^{(n-1)}(t_0)=\frac{m}{2}(\Gamma_2-\Gamma_1)\tag{3.7}$$

将(3.7)代入(3.6)当 $t\in(0,t_0)$ 时有:

$$z^{(n)}t=f(t,x_t(\cdot,\Gamma_1)+z_t,z(t)+x(t,\Gamma_1),\cdots,x^{(n-1)}(t,\Gamma_1)+z^{(n-1)}(t))-$$

$$f(t,x_t(\cdot,\Gamma_1),x(t,\Gamma_1),x'(t,\Gamma_1),\cdots,x^{(n-1)}(t,\Gamma_1))$$
$$\geqslant -Mz^{(n-1)}(t)-Nz^{(n-2)}(t). \tag{3.8}$$

令 $z^{(n-2)}(t)=y(t)$，则由(3.8)可得：

$$\begin{cases} y''(t)\geqslant -My'(t)-Ny(t), \quad t\in(0,t_0), & (3.9)\\ y(0)=0, y'(0)=\Gamma_2-\Gamma_1. & (3.10)\end{cases}$$

由引理 1 可得当 $t\in(0,t_0)$ 时有 $y'(t)\geqslant m(\Gamma_2-\Gamma_1)$，

$$z^{(n-1)}(t_0)=\lim_{t\to t_0}z^{(n-1)}(t)=\lim_{t\to t_0}y'(t)\geqslant m(\Gamma_2-\Gamma_1)>\frac{m}{2}(\Gamma_2-\Gamma_1),$$

这与(3.7)矛盾.故对一切 $t\in(0,T]$ 均有

$$z^{(n-1)}(t)>\frac{m}{2}(\Gamma_2-\Gamma_1). \tag{3.11}$$

由(3.11)并结合泰勒公式，当 $0\leqslant j<n-1$ 时有

$$z^{(j)}(t)=z^{(j)}(0)+z^{(j+1)}(0)t+\cdots+\frac{1}{(n-j-1)!}z^{(n-1)}(\xi)t^{n-j-1}$$
$$\geqslant\frac{1}{(n-j-1)!}\frac{m}{2}(\Gamma_2-\Gamma_1)t^{n-j-1},$$

故得 $z^{(j)}(T)\geqslant\frac{1}{(n-j-1)!}\frac{m}{2}T^{n-j-1}$. 因而有 $\lim\limits_{\Gamma_2\to+\infty}z^{(j)}(T)=+\infty$ 即 $\lim\limits_{\Gamma_2\to+\infty}x^{(j)}(T,\Gamma_2)=+\infty$，且 $\lim\limits_{\Gamma_1\to-\infty}z^{(j)}(T)=+\infty$，即 $\lim\limits_{\Gamma_1\to-\infty}x^{(j)}(T,\Gamma_1)=-\infty$. 由条件Ⅱ易得至少存在一个 Γ_0 使得：$x^{(j)}(T,\Gamma_0)=A$，当 $j=n-1$ 时，结论显然是正确的.故得对 $\forall\ j\in I$ 边值问题(1.3)～(1.4)$_j$ 至少存在一个解.

假如边值问题(1.3)～(1.4)$_j$ 存在两个解 $x_1(t),x_2(t)$，令

$$\Gamma_1=x_1^{(n-1)}(0),\Gamma_2=x_2^{(n-1)}(0),\tilde{y}(t)=x_1(t)-x_2(t),$$

不妨设 $\Gamma_1>\Gamma_2$ 则 $\tilde{y}(t)$ 满足如下条件：

$$\tilde{y}(t)=0,\quad t\in[-r,0],\tilde{y}'(0)=\cdots=\tilde{y}^{(n-2)}(0)=0,\tilde{y}^{(n-1)}(0)=\Gamma_2-\Gamma_1, \tag{3.12}$$
$$\tilde{y}^{(j)}(T)=A-A=0. \tag{3.13}$$

与前面类似可证，当 $t\in(0,T]$ 时 $\tilde{y}^{(j)}(t)>0$，这与(3.13)矛盾，故得对 $\forall\ j\in I$ 边值问题(1.3)～(1.4)$_j$ 的解存在唯一.

类似地有如下结果：

定理 2 若定理 1 的条件Ⅰ～Ⅲ均满足且 $M^2-4N=0$，则当满足条件 $M<\frac{2}{T}$ 时，对 $\forall\ j\in I$ 边值问题(1.3)～(1.4)$_j$ 存在唯一解.

定理 3 若定理 1 的条件Ⅰ～Ⅲ均满足且 $M^2-4N<0$，则当 $\frac{\sqrt{4N-M^2}}{2}T+\arccos\frac{-M}{2N}\in(0,\pi)$ 时，对 $\forall\ j\in I$ 边值问题(1.3)～(1.4)$_j$，存在唯一解.

作为应用，现举例如下：

例 考虑变系数非齐次线性 n 阶 RFDE 边值问题

$$\begin{cases} x^{(n)}(t) = \sum_{i=1}^{m} q_i(t)x(t-r_i) + p_0(t)x(t) + \cdots + p_{n-1}(t)x^{(n-1)}(t) + f(t), t \in [0,T], & (3.14) \\ x(t) = \varphi(t), t \in [-r,0], x'(0) = \eta_1, x''(0) = \eta_2, \cdots, x^{(n-2)}(0) = \eta_{n-2}, x(T) = A, & (3.15) \end{cases}$$

其中：$q_i(t), p_j(t), (i = 1,2,\cdots,l; j = 0,1,\cdots,n-1)$ 和 $f(t)$ 均为$[0,T]$上的连续函数且：$q_i(t) \geqslant 0, p_j(t) \geqslant 0 (i = 1,2,\cdots,l; j = 0,1,2,\cdots,n-3)$，

$$\inf_{t \in [0,T]} p_{n-2}(t) \geqslant -N, \quad \inf_{t \in [0,T]} p_{n-1}(t) \geqslant -M,$$

则有如下结果：

(1) 若 $M^2 - 4N > 0$，则当 $N \leqslant 0$ 或 $N > 0, M < 0$ 时，由定理1得边值问题(3.14)～(3.15)存在唯一解.

(2) 若 $M^2 - 4N < 0$，则当 $M < \frac{2}{T}$ 时，由定理2得边值问题(3.14)～(3.15)存在唯一解.

(3) 若 $M^2 - 4N < 0$，则当：$\frac{\sqrt{4N - M^2}}{2} + \arccos\frac{-M}{N} \in (0,\pi)$ 时，边值问题(3.14)～(3.15)存在唯一解.

感谢导师郑祖庥教授的指导和帮助.

参考文献：

[1] LAUI B S and ZHANG B G. *Boundary value problems' for second order functional differential equations* [J]. Ann. of Diff, Eqs., 1992, **8**(3): 261-268.

[2] REGAN D O. *Existence of solution to some RFDE* [J]. Nonl. Anal., 1993, **20**(2): 79-95.

[3] SFICAS and NTOUYAS. *A boundary value problem for n order functional differential equation* [J]. Nonl. Anal., 1981, **5**(3): 325-335.

[4] 鲁世平. n 阶 RFDE 边值问题解的存在性和唯一性 [J]. 数学研究, 1997, **30**(3): 292-296.

Boundary Value Problems for n Order Retarded Functional Differential Equations

LU Shi-ping

(Dept. of Math., Anhui Normal University, Wuhu 241000, China)

Abstract: In this paper, we stndy the boundary value problems for n order retarded functional differential equations:

$$x^{(n)}(t) = f(t, x_t, x(t), x'(t), \cdots, x^{n-1}(t)), \quad t \in [0,T],$$

$$\begin{cases} x(t) = \varphi(t), \quad t \in [-r,0], \\ x'(0) = \eta, x''(0) = \eta_2, \cdots, x^{(n-2)}(0) = \eta_{n-2}, x^{(j)}(t) = A, \end{cases}$$

where $j \in I = \{0,1,2,\cdots,n-1\}$, some new results for existence and uniqueness are obtained.

Key words: boundary value problem; initial value problem; existence and uniqueness.