第20卷第3期 数学研究与评论 Vol. 20 No. 3
2000年8月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Aug. 2000

扭曲余积和广义相关Hopf模*

张良云[1,2]

(1. 南京农业大学理学院，210095； 2. 南京大学数学系，210008)

摘 要:本文在学习[1,2]之后,首先给出了扭曲余积关于量子余交换的一个重要性质;在学习[3]之后,又证明了广义相关Hopf模的对偶模仍是广义相关Hopf模,从而推广了[3]中的相关结论.

关键词:Hopf代数;扭曲积;扭曲余积;广义相关Hopf模.

分类号:AMS(1991) 16W30/CLC O153.3

文献标识码:A **文章编号**:1000-341X(2000)03-0429-05

1 扭曲积与扭曲余积

设H是一个Hopf代数,A为左H-模代数,$\sigma:H\otimes H\to A$,是一个k-双线性映射.设$A\#_\sigma H$作为向量空间是$A\otimes H$,它的乘法定义为:$(a\#_\sigma h)\cdot(b\#_\sigma g)=\sum a(h_1\cdot b)\sigma(h_2,g_1)\#_\sigma h_3g_2$,$a\#_\sigma h,b\#_\sigma g\in A\#_\sigma H$.如果$A\#_\sigma H$有单位元$1_A\#_\sigma 1_H$,并满足乘法结合律,那么称$A\#_\sigma H$为交叉积代数[1].特别地,当代数$A=k$(域)时,交叉积代数$k\#_\sigma H$称为扭曲积,简记为$K_\sigma[H]$.

设C为左H-余模余代数[4],它的左H-余模结构映射为

$$\rho_C:C\to H\otimes C,\rho_C(c)=\sum c^{-1}\otimes c^{\circ}.$$

$\alpha:C\to H\otimes H$,是一个2-余循环线性映射,$\alpha(c)=\sum\alpha_1(c)\otimes\alpha_2(c)$.设$C\times_\alpha H$作为向量空间为$C\otimes H$,它的余乘法定义为

$$\bar{\Delta}(c\times_\alpha h)=\sum[c_{(1)}\times_\alpha c_{(2)}^{-1}\alpha_1(c_{(3)})h_{(1)}]\otimes[c_{(2)}{}^{\circ}\times_\alpha\alpha_2(c_{(3)})h_{(2)}],c\times_\alpha h\in C\times_\alpha H,$$

余单位定义为$\bar{\varepsilon}(c\times_\alpha h)=\varepsilon_C(c)\varepsilon_H(h)$.如果$(C\times_\alpha H,\bar{\Delta},\bar{\varepsilon})$构成余代数,那么称$C\times_\alpha H$为交叉余积余代数[5].特别地,当余代数$C=k$时,交叉余积余代数$k\times_\alpha H$称为扭曲余积,简记为$K_\alpha(H)$.

交叉积代数和交叉余积余代数是对偶概念,但在一般情况下,它们通过函子"0"或"*"未必能对偶过来.如若能对偶过来,可讨论并研究其对偶性质(见定理1).

命题1 设H是有限维Hopf代数,则有如下结论:

(1) 如果$K_\sigma[H]$是扭曲积,那么$K_\alpha(H^{\circ})$是扭曲余积.这里

* 收稿日期:1997-10-28; 修订日期:1999-11-30

作者简介:张良云(1964-),男,安徽肥东县人,副教授,现为南京大学数学系博士生.

$$\alpha: K \xrightarrow{\sigma^*} (H \otimes H)^* \cong H^* \otimes H^*.$$

(2) 如果 $K_\tau(H)$ 是扭曲余积,那么 $K_\beta[H^*]$ 是扭曲积. 这里 $\beta = \tau^*$.

证明 由[6,Th1]可知(2)成立. 对于(1),只要证 $F: k \times_\alpha H^\circ \to (k \#_\sigma H)^\circ, 1 \times_\alpha f \to (1 \#_\sigma h \to f(h))$,为余代数同构映射即可. 事实上,(i) F 为向量空间同构映射,显然.

(ii) $(F \otimes F)\bar{\Delta}_{K_\alpha(H^\circ)} = \Delta_{(K_\sigma[H])^\circ} F, \varepsilon_{(K[H])^\circ} F = \bar{\varepsilon}_{K_\alpha(H^\circ)}$. 读者直接证明.

在[7]中,R. K. MoLnar 分别给出了 Smash 积和 Smash 余积成为 Hopf 代数的充分条件(见[7]中的 Th2.13 和 Th2.14). Smash 积 $A \# H$ 是当 σ 平凡时的特殊的交叉积 $A \#_\sigma H$,而扭曲积 $K_\sigma[H]$ 是当 $A = k$(域)时的特殊交叉积 $k \#_\sigma H$,下面给出扭曲积 $K_\sigma[H]$ 和扭曲余积 $K_\tau(H)$ 成为双代数和 Hopf 代数的判别条件.

命题 2 设 $K_\sigma[H]$ 是扭曲积,H 是余可换 Hopf 代数,则下列结论成立.

(1) $\sigma^2 = \sigma$ 当且仅当 $K_\sigma[H]$ 是双代数.

(2) 若 $\sigma^2 = \sigma, \sum \sigma(h_{(1)}, S(h_{(2)})) = \varepsilon(h)$,则 $K_\sigma[H]$ 是 Hopf 代数. 这里 $\sigma^2 = \sigma * \sigma$,其中"$*$"为卷积乘法.

证明 (1) 设 $\sigma^2 = \sigma$,下证 $K_\sigma[H]$ 是双代数.

$K_\sigma[H]$ 作为余代数为张量积余代数,$\Delta_{K_\sigma[H]}(1 \#_\sigma h) = \sum (1 \#_\sigma h_{(1)}) \otimes (1 \#_\sigma h_{(2)})$, $\varepsilon_{K_\sigma[H]}(1 \#_\sigma h) = \varepsilon_H(h)$,则 $\Delta_{K_\sigma[H]}, \varepsilon_{K_\sigma[H]}$ 皆为代数映射. 事实上,

$$\begin{aligned}
\Delta_{K_\sigma[H]}(1 \#_\sigma h)(1 \#_\sigma g) &= \sum \Delta_{K_\sigma[H]}(\sigma(h_{(1)}, g_{(1)}) \#_\sigma h_{(2)} g_{(2)}) \\
&= \sum \sigma(h_{(1)}, g_{(1)}) \#_\sigma h_{(2)} g_{(2)} \otimes 1 \#_\sigma h_{(3)} g_{(3)} \qquad \text{(A)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Delta_{K_\sigma[H]}(1 \#_\sigma h) \Delta_{K_\sigma[H]}(1 \#_\sigma g) \\
&= \sum (1 \#_\sigma h_{(1)} \otimes 1 \#_\sigma h_{(2)}) \cdot (1 \#_\sigma g_{(1)} \otimes 1 \#_\sigma g_{(2)}) \\
&= \sum (1 \#_\sigma h_{(1)})(1 \#_\sigma g_{(1)})) \otimes (1 \#_\sigma h_{(2)})(1 \#_\sigma g_{(2)}) \\
&= \sum \sigma(h_{(1)}, g_{(1)}) \#_\sigma h_{(2)} g_{(2)} \otimes \sigma(h_{(3)}, g_{(3)}) \#_\sigma h_{(4)} g_{(4)} \\
&= \sum \sigma(h_{(1)}, g_{(1)}) \#_\sigma h_{(3)} g_{(3)} \otimes \sigma(h_{(2)}, g_{(2)}) \#_\sigma h_{(4)} g_{(4)} \qquad \text{(B)} \\
&= \sum \sigma(h_{(1)}, g_{(1)}) \#_\sigma h_{(2)} g_{(2)} \otimes 1 \#_\sigma h_{(3)} g_{(3)} \qquad \text{(C)}
\end{aligned}$$

由"(A)=(C)"知:$\Delta_{K_\sigma[H]}$ 为代数映射. 关于 $\varepsilon_{K_\sigma[H]}$ 为代数映射,显然,故 $K_\sigma[H]$ 为双代数.

反之,设 $K_\sigma[H]$ 是双代数,则 $\Delta_{K_\sigma[H]}$ 为代数映射,从而"$(A) = (B)$",两边同时作用 $I \otimes \varepsilon_H \otimes I \otimes \varepsilon_H$,有 $\sum \sigma(h_{(1)}, g_{(1)}) \sigma(h_{(2)}, g_{(2)}) = \sigma(h, g)$,即 $\sigma^2 = \sigma$.

(2) 由(1)来证明.

对偶地,有如下:

命题 3 设 $K_\alpha(H)$ 是扭曲余积,H 是可换 Hopf 代数,则 $\alpha^2 = \alpha$ 当且仅当 $K_\alpha(H)$ 是双代数.

2 两个引理

在[5,P_{184}]中,作者证明了:当H是有限维Hopf代数时,H是辫化Hopf代数当且仅当H°是拟三角Hopf代数.作为它的应用,我们将给出量子交换与量子余交换[4]之间的对偶关系(见引理1).当H是有限维Hopf代数时,在Smash积与Smash余积之间可建立对偶关系(见引理2).

在本节中,H皆是有限维Hopf代数,以下不特别指明.

引理1 (1) 设(H,R)是拟三角Hopf代数,A为左H-模代数.如果A为量子交换的,那么A°为量子余交换的.

(2) 设(H,σ)是辫化Hopf代数,C为左H-余模余代数.如果C为量子余交换的,那么C^*为量子交换的.

证明 仅证(2),关于(1)类似证明.由于(H,σ)为辫化Hopf代数,所以(H^*,R)为拟三角Hopf代数[5,P_{184}],其中$R=T\sigma^*(1_K)$,T为扭曲映射.C^*为左H^*-模代数,显然.则对$\forall f,g\in C^*$,有$fg=\sum(R^{(2)}\cdot g)(R^{(1)}\cdot f)$.读者自证.即$C^*$为量子交换的.

引理2[6,Th1] (1) 若$C\times H$为Smash余积,则$(C\times H)^*\cong C^*\#H^*$代数同构.

(2) 若$A\#H$为Smash积,A为有限维代数,则$(A\#H)^\circ\cong A^\circ\times H^\circ$余代数同构.

3 主要结论

定理1 设H是有限维余交换Hopf代数,$(D(H),R)$是量子偶(Drinfel'd double)[1],$K_\sigma[H]$是扭曲积,σ可逆,则下列结论成立.

(1) 扭曲余积$K_\alpha(H^\circ)$是左$H^{op}\times H^\circ$-余模余代数.

(2) $K_\alpha(H^\circ)$关于$(H^{op}\times H^\circ,\tau)$是量子余交换的.这里的$\alpha$由$\sigma$诱导出来,见命题1.

证明 由[1]知$(D(H),R)$是拟三角Hopf代数,则$(D(H)^\circ,\sigma)$是辫化Hopf代数.再由[1,引理1.1]知$D(H)^\circ=(H^{*Cop}\#H)^\circ\cong(H^{*Cop})^\circ\times H^\circ\cong H^{op}\times H^\circ$,这里的同构为Hopf代数同构(说明了量子偶$D(H)$的对偶$D(H)^\circ$为Smash余积Hopf代数).余下的由命题1、引理1和[1,Th1.5]来证明.

推论1 设H是有限维可换Hopf代数,$K_\alpha(H)$是扭曲余积,α可逆,则下列结论成立.

(1) $K_\alpha(H)$是左$(H^*)^{op}\times H$-余模余代数.

(2) $K_\alpha(H)$是关于$((H^*)^{op}\times H,\sigma)$量子余交换的.

证明 由命题1知$K_\alpha(H)^*$是扭曲积,即$K_\beta[H^*]$是扭曲积,$\beta=\alpha^*$可逆(易证).由题设知H^*是有限维余交换Hopf代数,再由[1,Th1.5]可知$K_\beta[H^*]$是左$D(H^*)$-模代数,并且关于$D(H^*)$是量子交换的.再由定理1知$K_{\beta^*}(H^{**})$是左$(H^*)^{op}\times H^{**}$-余模余代数,并且关于$(H^*)^{op}\times H^{**}$是量子余交换的.由于$\beta^*=\alpha^{**}\cong\alpha$,$H^{**}\cong H$,所以(1)、(2)成立.

注1 此推论恰是[1,Th1.5]的对偶结论.如若不用对偶理论给予证明,而直接证明,难度是很大的.由此可见,用对偶理论来解题有其独到之处.

在[1]中,作者给出了Smash积$A\#H$的单式范畴(monoidal category),在[4]中,作者给

出了 Smash 余积 $C\times H$ 的张量范畴(tensor category),而 Smash 积和 Smash 余积在一定情况下是对偶的(见引理 2),自然地提出如下一个问题:单式范畴与张量范畴是否为对偶范畴?

定理 2 (1) 设(H,σ)是有限维辫化 Hopf 代数,C 是量子余交换的左 H- 余模余代数,则 ${}_{C\times H}M$ 是张量范畴[4],且${}_{C^*\#H^*}M$ 是单式范畴[1].

(2) 设(H,R)是有限维拟三角 Hopf 代数,A 是有限维量子交换的左 H— 模代数,则${}_{A\#H}M$ 是单式范畴,且${}_{A^*\times H^*}M$ 是张量范畴. 证明略.

在[3]中,作者证明了相关 Hopf 模的对偶$(\quad)^\circ$仍为相关 Hopf 模,这样就证明了 Hopf- 模的对偶模仍为 Hopf 模(这一问题是许永华教授一直关心并想解决的问题). 在[2]中,A. Masuoka 等人提出了广义相关 Hopf 模概念,它是相关 Hopf 模概念的推广. 下面证明广义相关 Hopf 模的对偶$(\quad)^\circ$仍为广义相关 Hopf 模,并且给出广义相关 Hopf 模的基本结构定理,这样推广了[3]中的有关结论. 最后,给出相关 Hopf 模的一个性质.

设 B 为左 A- 余模代数,D 为左 A- 模余代数. 如果 M 为左 D- 余模,又为左 B- 模,且满足 $\rho_M(bm)=\sum b_{(0)}m_{(0)}\otimes b_{(1)}m_{(1)}$,那么称 M 为广义相关左(D,B)-Hopf 模. 简称为广义相关(D,B)-Hopf 模[2]. 显然,广义相关 Hopf 模是相关 Hopf 模的推广.

定理 3 设 M 为广义相关(D,B)-Hopf 模,则 M° 为广义相关(B°,D°)-Hopf 模.

证明 显然,B° 为左 A°- 模余代数,D° 为左 A°- 余模代数. 设 $\rho_M:M\to D\otimes M$,$\psi_M:B\otimes M\to M$,分别为 M 的左 D- 余模和左 B- 模结构映射. 设 $\rho_B:B\to A\otimes B$,$\psi_D:A\otimes D\to D$,分别为 B 的左 A- 余模结构映射和 D 的左 A- 模结构映射. 下面要证明:(1)${\psi_M}^\circ:M^\circ\to B^\circ\otimes M^\circ$,为 M° 的左 B°- 余模结构映射[3];(2)$\rho_M^*:D^\circ\otimes M^\circ\to M^\circ$,为左 D°- 模结构映射;(3)$\psi_{M^\circ}(d^\circ m^\circ)=\sum {d^\circ}_0{m^\circ}_0\otimes {d^\circ}_1{m^\circ}_1$,$m^\circ\in M^\circ$,$d^\circ\in D^\circ$. 对于(2),设 $f\in D^\circ$,$g\in M^\circ$,则存在 $I\lhd A$,$J\lhd B$,使 $\dim_K A/I<\infty$,$\dim_K B/J<\infty$,且 $f(ID)=0=g(JM)$. 由于 ρ_B 为代数映射,所以 $\rho_B^{-1}(I\otimes B+A\otimes J)\lhd B$,且 $\dim_K B/\rho_B^{-1}(I\otimes B+A\otimes J)<\infty$,从而$\langle\rho_M^*(f\otimes g),\rho_B^{-1}(I\otimes B+A\otimes J)M\rangle=\langle f\otimes g,\rho_M(\rho_B^{-1}(I\otimes B+A\otimes J)M)\rangle\subseteq\langle f\otimes g,(I\otimes B+A\otimes J)\rho_M(M)\rangle\subseteq\langle f\otimes g,(I\otimes B+A\otimes J)(D\otimes M)\rangle=\langle f\otimes g,ID\otimes M\rangle+\langle f\otimes g,D\otimes JM\rangle=0$,因此,$\rho_M^*(f\otimes g)\in M^\circ$. 对于(3),与[3,Th2]的证法相似.

注 2 若 $D=A$,此定理就是[3,Th1].

若 $f:M\to N$,为广义相关(D,B)-Hopf 模映射(f 既为 D- 余模映射,又为 B- 模映射),则 $f^\circ:N^\circ\to M^\circ$,为广义相关$(B^\circ,D^\circ)$-Hopf 模映射[3,Prop 1].

因此,根据[2,Th1.5]和[3,prop 2]不难得到.

命题 4 设 B 是 D-cleft,则对任意有限维广义相关(D,B)-Hopf 模 M,有 $M^\circ\cong {M_x}^\circ\square_{B_x^\circ}B^\circ$(广义相关$(B^\circ,D^\circ)$-Hopf 模同构). 这里 $x\in D$,为 D 中的群像元素(group like).

注 3 当 $D=A$ 时,取 $x=\epsilon_A$,命题 4 就是[3,Th5].

设 H,L 皆为 Hopf 代数,如果 $P:L\to H$,为双代数映射,那么 H 成为右 L- 模余代数. H 的右 L- 模结构为 $h\leftharpoonup g=hp(g)$,$h\in H$,$g\in L$.

定义 一个余代数映射 $\psi:H\to L$,称为上述 P 的交叉部分,如果 ψ 为右 L- 模映射.

命题 5 设 $P:L\to H$,为双代数映射,如果存在 P 的交叉部分,则下列结论成立.

(1) $H\cong H_0\otimes L$,作为右 L-Hopf 模同构,从而 $H^\circ\cong(H_0\otimes L)^\circ$ 为右 L°-Hopf 模同构. 这

里 $H_0=\{h\in H\mid\rho_H^+(h)=h\otimes 1\}$，$\rho_H^+$ 为 H 的右 L-余模结构映射.

(2) 对任意相关 $[H,L]$-Hopf 双模 M[3]，作为右 L-模是投射的，从而 M° 是内射的右 L°-余模.

证明 (2) 由[3,Th4]可知.

(1) 据[3,Prop1]和[8,P_{84}]可知，仅要证明 H 为右 L-Hopf 模即可，其中 H 的右 L-余模结构映射为：$\rho_H^+(h)=\sum h_{(1)}\otimes\psi(h_{(2)})$，$\Delta_H(h)=\sum h_{(1)}\otimes h_{(2)}$. 直接证明.

注 4 由命题 5(2) 可知：对任意右 H-Hopf 模 M，作为右 H-模是投射的，从而右 H°-Hopf 模 M° 是内射的右 H°-余模.

致谢 作者衷心感谢导师佟文廷教授的关心与指导.

参考文献：

[1] COHEN M and WESTREICH S. *From Supersymmetry to Quantum Commutativity* [J]. J. Alg., 1994, **168**: 1—27.

[2] MASUOKA A and DOI Y. *Generalization of Cleft Comodule Algebras* [J]. Comm. Alg., 1992, **20**(12): 3703—3721.

[3] ZHANG Liang-yun. *The Duality of Relative Hopf Modules* [J]. Acta. Math. Sinica., 1997, **40**(1): 73—79.

[4] HU Guo-quan and XU Yong-hua. *Quantum Commutation Algebra and Its Duality* [J]. Science in China (Series A), 1996, **26**(10): 892—900.

[5] MONTOGOMERY S. *Hopf Algebras and Theirs Actions on Rings* [M]. Cbms Lect Notes, 1993.

[6] ZHANG Liang-yun. *The Properties of Crossed Coproducts and Applications of Duality Theorem* [J]. Joural of Nanjing Normal University, 1997, **20**(3): 6—8.

[7] MOLNAR R K. *Semi-Direct Products of Hopf Algebras* [J]. J. Alg., 1977, **47**: 29—51.

[8] SWEEDLER M E. *Hopf Algebras* [M]. New York, 1969.

Twisting Coproduct and General Relative Hopf Module

ZHANG Liang-yun[1,2]

(1. College of Science, Nanjing Agricultural University, Nanjing 210095, China;
2. Dept. of Math., Nanjing University, Nanjing 210008, China)

Abstract: In this paper, we first give an important property of twisting coproduct of quantum cocommutativity after studing the paper [1,2]; Then, we prove that the duality module of general relative Hopf module is still a general relative Hopf module, thus extend the relatived conclusions of [3].

Key words: Hopf algebra; twisting product; twisting coproduct; general relative Hopf module.