第 20 卷第 4 期
2000年11月
数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION
Vol. 20 No. 4
Nov. 2000

关于μ-全纯函数的契边定理*

苏 简 兵

(徐州师范大学数学系，221116)

摘 要：本文利用 Frobenius-Nirenberg 定理，以及 μ-全纯函数满足 Hartogs 现象这样的性质，证明了关于 μ-全纯函数的契边定理.

关键词：μ-全纯函数；Hartogs 现象；契边定理.

分类号：AMS(1991) 32H40/CLC O174.56

文献标识码：A　　　　**文章编号**：1000-341X(2000)04-0588-03

关于全纯函数的契边定理，源于对物理学中的量子场论和色散关系等有关问题的研究. 1971 年，W. Rudin[1]对契边定理的研究工作作了较全面的总结. 在此之后，关于契边定理本身及其应用又有了进一步的发展. 现在契边定理在讨论函数的边界正则性等许多研究领域都有应用. 例如，E. Bedford[2]，J. P. Rosay[3]. ，F. Forstneric[4]. 就是其中较为典型的文章. 本文讨论关于 μ-全纯函数的一个契边定理. 即将证明下面的结果：

定理 1　设 R^n_+, R^n_- 分别为 R^n 的正锥和负锥，$f(z)$ 为 $D=\{z\in \mathbb{C}^n:(\mathrm{Re}z^1,\mathrm{Re}z^2,\cdots,\mathrm{Re}z^n)\in R^n_+\cup R^n_-\}$ 上的 μ-全纯函数，且 $f(z)\in C^2(\mathbb{C}^n)$，则存在函数 $F(z)$，在 C^n 上，$F(z)$ 为 μ-全纯函数，在 D 上，$F(z)\equiv f(z)$.

对于 $_\mu\bar{\partial}$ 算子以及 μ-全纯函数的定义和有关性质，在文[5]，[6]中，有全面而精确的阐述，这里从略.

要想证明定理 1，只要能证明下面的定理 2 即可.

定理 2　设 $W=\{z\in \mathbb{C}^2:\mathrm{Re}z\in R^2_+\cup R^2_-\}$，设 $f(z)$ 为 W 上的 μ-全纯函数，且 $f(z)\in C^2(\mathbb{C}^2)$，则存在函数 $F(z)$，在 $\mathbb{C}^2$ 上，$F(z)$ 为 μ-全纯函数，在 W 上，$F(z)\equiv f(z)$.

这是因为，若 $f(z)$ 满足定理 1 的条件，则此 $f(z)$ 在过点 $(1,1,\cdots,1)$ 与 $(0,0,\cdots,0)$ 的任一复二维平面上也必然满足定理 2 的条件. 这样，由定理 2，$f(z)$ 必在这样的复二维平面上 μ-全纯，由复 2 维平面的任意性可知，$f(z)$ 必然在 C^n 上 μ-全纯.

为了证明定理 2，我们先证明下面的引理：

引理 1　设 $f(z)$ 为 $W_1=\{(z^1,z^2):\mathrm{Re}z^1<0,\mathrm{Re}z^2>0\}$ 上的 μ-全纯函数，且连续到边界. 则存在函数 $F(z)$，使在 $\mathbb{C}^2$ 上，$F(z)$ 为 μ-全纯函数，而在 W_1 上，$F(z)=f(z)$.

类似于引理 1，有

* 收稿日期：1997-08-04；修订日期：1999-06-11

作者简介：苏简兵(1964-)，男，江苏省涟水县人，硕士，徐州师范大学讲师.

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

引理 2　设 $g(z)$ 在 $W_2=\{(z^1,z^2):\mathrm{Re}z^1>0,\ \mathrm{Re}z^2<0\}$ 上 μ- 全纯且连续到边界. 则存在函数 $G(z)$，在 $\mathbf{C}^2$ 上，$G(z)$ 为 μ- 全纯函数，在 W_2 上，$G(z)=g(z)$.

引理 1 的证明　1°. 设 $z_0=(z_0^1,z_0^2)$ 为 $W_1^T:=\{(z^1,z^2):\mathrm{Re}z^1>0$ 且 $\mathrm{Re}z^2<0\}$ 中任一取定的点，取充分大的 $R\in N$(N 表示自然数集)，使 $R>|z_0|$.

则由已知，必有 $f(z)$ 在 $W_1\cap D^2(0,R)$ 上 μ- 全纯. 其中，

$$D^n(0,R)=\{z\in\mathbf{C}^n,|z^i|<R,i=1,2,\cdots,n\}.$$

由文[5](p147 性质(b))，对 μ- 全纯函数，也有 Hartogs 现象. 因此，存在函数 $F_R(z)$，使在 W_1 上，$F_R(z)=f(z)$，而在 $D^2(0,R)$ 上，$F_R(z)$ 为 μ- 全纯函数. 从而，在 $z_0=(z_0^1,z_0^2)$ 点处 μ- 全纯.

2°. 对 $\forall R_1,R_2\in N$，不妨设 $R_1<R_2$，由文[5](p147 性质(c))知，在 $D^2(0,R_1)$ 上，

$$F_{R_1}(z)=F_{R_2}(z).$$

3°. 在 $\mathbf{C}^2$ 上定义函数 $F(z)$，使对 $\forall z\in\mathbf{C}^2$，任取 $R>|z|$，且 $R\in N$，定义 $F(z)=F_R(z)$，这样，由 2° 知 $F(z)$ 在 $\mathbf{C}^2$ 上有定义，由 1° 知 $F(z)$ 为 $\mathbf{C}^2$ 上的 μ- 全纯函数，并且当 $z\in W_1$ 时，有 $F(z)=f(z)$.

定理 2 的证明　定义两个(0,1)形式：

$$h_1(z)=\begin{cases}{}_\mu\bar\partial f(z), & \mathrm{Re}z^1>0,\\ 0, & \text{其它},\end{cases}$$

$$h_2(z)={}_\mu\bar\partial f(z)-h_1(z),\qquad z\in\mathbf{C}^2.$$

因为在 W 上，${}_\mu\bar\partial_j f=0$，并且 $\mathrm{grad}({}_\mu\bar\partial_j f)=\left(\left(\frac{\partial({}_\mu\bar\partial_j f)}{\partial z^1},\frac{\partial({}_\mu\bar\partial_j f)}{\partial z^2}\right)\right)=0$，因此，$h_j(z)$ 是连续可微于 $\mathbf{C}^2$，并且${}_\mu\bar\partial h_k=0$，其中 $j,k=1,2$.

由 L. Hormander[7]，存在函数 $g_j(z)$ $(j=1,2)$：使得${}_\mu\bar\partial g_j=h_j$，$j=1,2$，则 $g_1(z)$ 在 $W_1=\{(z^1,z^2).\mathrm{Re}z^1<0,\ \mathrm{Re}z^2>0\}$ 上 μ- 全纯. 由引理 1 知，存在函数 $G_1(z)$，在 $\mathbf{C}^2$ 上，$G_1(z)$ 为 μ- 全纯函数，在 W_1 上，$G_1(z)=g_1(z)$.

同样，$g_2(z)$ 在 $W_2=\{(z^1,z^2).\mathrm{Re}z^1>0,\ \mathrm{Re}z^2<0\}$ 上，为 μ- 全纯函数，在 W_2 上，

$$G_2(z)=g_2(z).$$

令 $F(z)=f(z)+(G_1(z)-g_1(z))+(G_2(z)-g_2(z))$，则 $F(z)$ 即为所求.

参考文献：

[1]　RUDIN W. *Lectures on the edge-of-wedge theorem* [C]. CBMS Regional Conference Series in Math. No. 6 American Mathematical Society Providence. R. I. 1971.

[2]　BEDFORD E. *Holomorphic continuation at a totally real edge* [J]. Math. Ann., 1977, **230**: 213—225.

[3]　ROSAY J P. *A propos de "wedges" et D' "edges,", et de prolongements holomorphes* [J]. Trans. of Amer. Math. Soc., 1986, **297**: 63—72.

[4]　FORSTNERIC F. *An elementary proof of Fefferman's theorem* [J]. Expo. Math., 1992, **10**: 135—149.

[5]　ZHANG Jin-hao. *Beltrami equation in high dimensions* [J]. Contemporany Math., 1993, **142**: 143—

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd.　All rights reserved.

150.
[6] ZHANG Jin-hao. *Neumann problem for overdetermined system related with almost complex structure* [J]. Science in China (Series A), 1992, **35**: 780.
[7] HORMANDER L. *The Frobenius-Nirenberg theorem* [J]. Arkiv. Mat., 1965, **5**: 425.

Edge of the Wedge Theorem about μ- Holomorphic Functions

SU Jian-bing
(Dept. of Math., Xuzhou Normal University, 221116, China)

Abstract: By using the Frobenius-Nirenberg theorem and the property that the Hartogs phenomena of extension for μ-holomorphic functions appear, we prove the edge of the wedge theorem about μ-holomorphic functions.

Key words: μ-holomorphic function; the Hartogs phenomena, the edge of the wedge theorem.

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.