第20卷第4期 数学研究与评论 Vol. 20 No. 4
2000年11月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Nov. 2000

强拟星函数的Fekete-Szegŏ不等式*

刘 名 生
(华南师范大学数学系，广州 510631)

摘 要：令 $T(\beta)$ 表示 β 级强拟星函数类，$f(z)=z+a_2z^2+a_3z^3+\cdots\in T(\beta)$，对任意实参数 μ，本文得到了 $|a_3-\mu a_2^2|$ 的准确上界.

关键词：拟凸函数；强拟星函数；近于凸函数；Fekete-Szegŏ 不等式.
分类号：AMS(1991) 30C45/CLC O174.51
文献标识码：A **文章编号**：1000-341X(2000)04-0591-05

1 引 言

令 H 表示形如

$$f(z)=z+a_2z^2+a_3z^3+\cdots \tag{1.1}$$

且在 $U=\{z;|z|<1\}$ 内解析的函数 $f(z)$ 的全体所成的函数类，H 中单叶函数全体记作 S. 用 S^*，C 和 K 分别表示通常的星像函数类，凸像函数类和近于凸函数类，它们都是 S 的子类.

设 $f\in H$，$0\leqslant\beta\leqslant1$. 若存在 $g(z)\in C$ 使下式

$$|\arg\frac{f'(z)}{g'(z)}|\leqslant\frac{\beta\pi}{2},\quad z\in U \tag{1.2}$$

成立，则称 $f(z)$ 为[1]意义下的 β 级近于凸函数，其全体记作 $K(\beta)$. 若存在 $g(z)\in C$ 使下式

$$\mathrm{Re}\,\frac{(zf'(z))'}{g'(z)}>0,\quad z\in U \tag{1.3}$$

成立，则称 $f(z)$ 为[2]意义下的拟凸函数，其全体记作 C^*.

本文仿照[1]和[2]的思想，定义如下的 β 级强拟星函数类. 对于 $f\in H$，$0\leqslant\beta\leqslant2$，若存在 $g(z)\in S^*$ 使下式

$$|\arg\frac{(zf'(z))'}{g'(z)}|\leqslant\frac{\beta\pi}{2},\quad z\in U \tag{1.4}$$

成立，则称 $f(z)$ 为 β 级强拟星函数，其全体记作 $T(\beta)$. 当 $\beta=1$ 时，$T(1)=T^*$ 就是[3]中讨论的拟星函数类. 由[3]知：$T^*\subset K$，因此当 $0\leqslant\beta\leqslant1$ 时 $T(\beta)\subset K$.

类似于(1.2)，也可定义函数类 $R(\beta)$：设 $f\in H$，$0\leqslant\beta\leqslant2$，则 $f\in R(\beta)$ 当且仅当存在 $g(z)$

---

* 收稿日期：1997-05-29；修订日期：1999-07-30
基金项目：国家自然科学基金(19971029)和广东省自然科学基金资助项目(980015)
作者简介：刘名生(1965-)，男，江西省大余县人，博士，华南师范大学副教授.

$\in S^*$使

$$|\arg \frac{f'(z)}{g'(z)}| \leqslant \frac{\beta\pi}{2}, \quad z \in U \tag{1.5}$$

成立.

由$C \subset S^*$可得$K(\beta) \subset R(\beta)$. 由(1.4)和(1.5)式可得

$$f(z) \in T(\beta) \Leftrightarrow zf'(z) \in R(\beta). \tag{1.6}$$

[4]证明了如下结果

定理 A 设$f \in S$, $f(z)$由(1.1)式给出, $0 \leqslant \mu < 1$, 则

$$|a_3 - \mu a_2^2| \leqslant 1 + 2\exp\left(-\frac{2\mu}{1-\mu}\right)$$

且对每个μ等号均能成立.

对于函数类K和$K(\beta)$等, 一些作者讨论了相应的问题[5,6,7]. 本文对于函数类$T(\beta)$, 建立了Fekete-Szegŏ不等式, 得到了准确的结果. 作为推论, 也得到了函数类$R(\beta)$的Fekete-Szegŏ不等式. 为了得到主要结果, 需要如下:

引理 1[8] 设$h(z) = 1 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots$在$U$内解析且满足$\mathrm{Re}\,h(z) > 0$ $(z \in U)$, 则$|c_k| \leqslant 2$ $(k \geqslant 1)$和$|c_2 - \frac{1}{2}c_1^2| \leqslant 2 - \frac{1}{2}|c_1^2|$.

2 主要结果及其证明

定理 1 设$f(z)$由(1.1)式给出, $f \in T(\beta)$, μ为实数, 则

$$|a_3 - \mu a_2^2| \leqslant \begin{cases} \frac{1}{9}\left[1 + \frac{1}{4}(8-9\mu)(\beta+2)^2\right], & \mu \leqslant \frac{8(\beta+1)}{9(\beta+2)}, \\ \frac{1}{9}\left[1 + 2\beta + \frac{8(8-9\mu)}{8-\beta(8-9\mu)}\right], & \frac{8(\beta+1)}{9(\beta+2)} \leqslant \mu \leqslant \frac{2}{3}, \\ \frac{1}{9}\left[3 + 2\beta + \frac{\beta(8-9\mu)^2}{8-\beta(8-9\mu)}\right], & \frac{2}{3} \leqslant \mu \leqslant \frac{8}{9}, \\ \frac{1}{9}(3+2\beta), & \frac{8}{9} \leqslant \mu \leqslant \frac{8(\beta+3)}{9(\beta+2)}, \\ \frac{1}{9}\left[-1 + \frac{1}{4}(9\mu-8)(\beta+2)^2\right], & \mu \geqslant \frac{8(\beta+3)}{9(\beta+2)}, \end{cases}$$

且对每个μ, 在所有情况下, 等号都能成立.

证明 由于$f \in T(\beta)$, 根据(1.4)式可得: 存在$g(z) \in S^*$和U内具有正实部的解析函数$h(z) = 1 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots$, 使得$(zf'(z))' = g'(z)h^{\beta}(z)$.

令$g(z) = z + \sum_{k=2}^{+\infty} b_k z^k$, 则代入上式并比较等式两边$z$和$z^2$两项的系数可得

$$9(a_3 - \mu a_2^2) = 3\left(b_3 - \frac{3}{4}\mu b_2^2\right) + \beta\left[c_2 + \frac{1}{4}(\beta x - 2)c_1^2\right] + \beta x c_1 b_2, \tag{2.1}$$

其中$x = \frac{1}{4}(8 - 9\mu)$.

因为$e^{-i\theta}f(e^{i\theta}z) = z + a_2 e^{i\theta}z^2 + a_3 e^{2i\theta}z^3 + \cdots$仍属于$T(\beta)$, 所以可以假定$a_3 - \mu a_2^2 \geqslant 0$. 现在估

计 $\mathrm{Re}(a_3-\mu a_2^2)$.

由于 $g(z)\in S^*$，所以存在 U 内具有正实部的解析函数 $P(z)=1+p_1z+p_2z^2+\cdots$，使得

$$zg'(z)\equiv g(z)P(z)$$

因此比较上述恒等式两边 z^2 和 z^3 的系数可得：$b_2=p_1,b_3=\frac{1}{2}(p_2+p_1^2)$，故根据引理 1 得

$$\mathrm{Re}(b_3-\frac{3}{4}\mu b_2^2)=\frac{1}{2}\mathrm{Re}(p_2-\frac{1}{2}p_1^2)+\frac{3}{4}(1-\mu)\mathrm{Re}p_1^2\leqslant 1-\rho^2+3(1-\mu)\rho^2\cos 2\varphi,$$

其中 $b_2=p_1=2\rho e^{i\varphi},\rho\in[0,1]$；

$$\mathrm{Re}[c_2+\frac{1}{4}(\beta x-2)c_1^2]=\mathrm{Re}(c_2-\frac{1}{2}c_1^2)+\frac{1}{4}\beta x\mathrm{Re}c_1^2\leqslant 2(1-r^2)+\beta xr^2\cos 2\theta,$$

其中 $c_1=2re^{i\theta},r\in[0,1]$. 故

$$\mathrm{Re}(a_3-\mu a_2^2)\leqslant\frac{1}{9}\psi(x)=\frac{1}{9}\psi(\frac{8-9\mu}{4}), \tag{2.2}$$

其中

$$\psi(x)=3-3\rho^2+(1+4x)\rho^2\cos 2\varphi+\beta(2-2r^2+\beta xr^2\cos 2\theta)+4\beta xr\rho\cos(\varphi+\theta). \tag{2.3}$$

下面分五种情况讨论：

(1) 当 $\frac{8(\beta+1)}{9(\beta+2)}\leqslant\mu\leqslant\frac{2}{3}$ 时，$\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant\frac{2}{\beta+2}$. 由(2.3)式得

$$\begin{aligned}\psi(x)&\leqslant 3+4(x-\frac{1}{2})\rho^2+\beta(2-2r^2+\beta xr^2\cos 2\theta+4xr)\\&\leqslant 1+4x+2\beta-\beta(2-\beta x\cos 2\theta)(r-\frac{2x}{2-\beta x\cos 2\theta})^2+\frac{4\beta x^2}{2-\beta x\cos 2\theta}\\&\leqslant 1+2\beta+4x+\frac{4\beta x^2}{2-\beta x}=1+2\beta+\frac{8x}{2-\beta x},\end{aligned}$$

所以由(2.2)和上式便得定理 1 的第二种情况. 当 $f_2(z)$ 为由下式

$$(zf_2(z))'=\frac{1+z}{(1-z)^3}[\lambda\frac{1+z}{1-z}+(1-\lambda)\frac{1-z}{1+z}]^\beta$$

(其中 $\lambda=\frac{8+(2-\beta)(8-9\mu)}{2[8-\beta(8-9\mu)]}$)定义的函数时，$b_2=c_2=2,b_3=3,c_1=\frac{4(8-9\mu)}{8-\beta(8-9\mu)}$，此时等号成立.

(2) 当 $\mu\leqslant\frac{8(\beta+1)}{9(\beta+2)}$ 时，$x\geqslant x_0=\frac{2}{\beta+2}$. 由(1)有

$$\psi(x_0)=1+2\beta+\frac{8x_0}{2-\beta x_0}=5+2\beta.$$

于是由(2.3)式有

$$\begin{aligned}\psi(x)&=\psi(x_0)+(x-x_0)[4\rho^2\cos 2\varphi+\beta^2r^2\cos 2\theta+4\beta r\rho\cos(\varphi+\theta)\\&\leqslant\psi(x_0)+(x-x_0)(\beta+2)^2\leqslant 1+x(\beta+2)^2,\end{aligned}$$

所以由(2.2)式便得定理 1 的第一种情况. 当 $f_1(z)$ 为由下式

$$(zf_1(z))'=\frac{1+z}{(1-z)^3}(\frac{1+z}{1-z})^\beta,$$

确定的函数时，$b_2=c_1=c_2=2,b_3=3$，故由(2.1)式得等号成立.

(3) 当 $\frac{2}{3}\leqslant\mu\leqslant\frac{8}{9}$ 时，$0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}$. 由(1)有

$$\psi(x)\leqslant 3+4(x-\frac{1}{2})\rho^2+\beta(2-2r^2+\beta xr^2\cos 2\theta+4xr)\leqslant 3+2\beta+\frac{4\beta x^2}{2-\beta x},$$

所以由(2.2)式便得定理 1 的第三种情况,等号可由下式

$$(zf_3(z))'=\frac{1+z^2}{(1-z^2)^2}[\lambda\frac{1+z}{1-z}+(1-\lambda)\frac{1-z}{1+z}]^\beta$$

确定的函数 $f_3(z)\in T(\beta)$所达到,其中

$$\lambda=\frac{8+(i-\beta)(8-9\mu)}{2[8-\beta(8-9\mu)]}.$$

(4) 当$\frac{8}{9}\leqslant\mu\leqslant\frac{8(\beta+3)}{9(\beta+2)}$时,$-\frac{2}{\beta+2}\leqslant x\leqslant 0$. 由(2.3)式有

$$\psi(0)=3-3\rho^2+\rho^2\cos 2\varphi+\beta(2-2r^2)\leqslant 3+2\beta. \tag{2.4}$$

令 $x_1=-\frac{2}{\beta+2}$,则通过一些计算可得

$$\psi(x_1)\leqslant 3+2\beta. \tag{2.5}$$

令 $x=\lambda x_1,\lambda\in[0,1]$,则$-\frac{2}{\beta+2}=x_1\leqslant x\leqslant 0$,于是由(2.3),(2.4)和(2.5)式可得

$$\psi(x)=\psi(\lambda x_1)=\lambda\psi(x_1)+(1-\lambda)\psi(0)\leqslant\lambda(3+2\beta)+(1-\lambda)(3+2\beta)=3+2\beta.$$

所以由(2.2)式便得定理 1 的第四种情况. 等号可由下式

$$(zf_4(z))'=\frac{1+z^2}{(1-z^2)^2}(\frac{1+z^2}{1-z^2})^\beta$$

确定的函数 $f_4(z)\in T(\beta)$所达到.

(5) 当 $\mu\geqslant\frac{8(\beta+3)}{9(\beta+2)}$时,$x\leqslant x_1=-\frac{1}{\beta+2}$. 由(2.3)和(2.5)式有

$$\begin{aligned}\psi(x)&=\psi(x_1)+(x-x_1)[4\rho^2\cos 2\varphi+\beta^2r^2\cos 2\theta+4\beta r\rho\cos(\varphi+\theta)]\\&\leqslant\psi(x_1)+(x_1-x)(\beta+2)^2\\&\leqslant 3+2\beta+(-\frac{2}{\beta+2}-x)(\beta+2)^2=-1-x(\beta+2)^2.\end{aligned}$$

因此定理 1 的第五种情况成立. 等号可由下式

$$(zf_5(z))'=\frac{1+iz}{(1-iz)^3}(\frac{1+iz}{1-iz})^\beta$$

确定的函数 $f_5(z)\in T(\beta)$所达到.

综上所述,本定理得证.

推论 1 设 $f(z)$由(1.1)式给出,$f\in R(\beta)$,υ为实数,则

$$|a_3-\upsilon a_2^2|\leqslant\begin{cases}\frac{1}{3}[1+(2-3\upsilon)(\beta+2)^2], & \upsilon\leqslant\frac{2(\beta+1)}{3(\beta+2)},\\ \frac{1}{3}[1+2\beta+\frac{8(2-3\upsilon)}{2-\beta(2-3\upsilon)}], & \frac{2(\beta+1)}{3(\beta+2)}\leqslant\upsilon\leqslant\frac{1}{2},\\ \frac{1}{3}[3+2\beta+\frac{4\beta(2-3\upsilon)^2}{2-\beta(2-3\upsilon)}], & \frac{1}{2}\leqslant\upsilon\leqslant\frac{2}{3},\\ \frac{1}{3}(3+2\beta), & \frac{2}{3}\leqslant\upsilon\leqslant\frac{2(\beta+3)}{3(\beta+2)},\\ \frac{1}{3}[-1+(3\upsilon-2)(\beta+2)^2], & \upsilon\geqslant\frac{2(\beta+3)}{3(\beta+2)},\end{cases}$$

且对每个 υ,在所有情况下,等号都能成立.

证明 由(1.6)式和定理 1 易得本推论.

参考文献:

[1] POMMERENKE CH. *On Close-to-convex analytic functions* [J]. Trans. Amer. Math. Soc., 1965, **114**: 176—186.

[2] NOOR K I and THOMAS D K. *Quasi-Convex univalent functions* [J]. Internat. J. Math. and Math. Sci., 1980, **3**: 255—266.

[3] 刘名生. 关于近于凸函数类的一个子类 [J]. 石油化工高等学校学报, 1993, **6**(2): 55—60.

[4] FEKETE M and SZEGŐ G. *Eine Bermerkung über ungerade schlichte funktionen* [J]. J. London Math. Soc., 1933, **8**: 85—89.

[5] KOEPF W. *On the Fekete-Szegö problem for close-to-convex functions* [J]. Proc. Amer. Math. Soc., 1987, **10**: 80—95.

[6] ABDEL-GAWAD H R and THOMAS D K. *The Fekete-Szegö problem for strongly close-to-convex functions* [J]. Proc. Amer. Math. Soc., 1992, **114**: 345—349.

[7] LONDON R R. *Fekete-Szegö inequalities for close-to-convex functions* [J]. Proc. Amer. Math. Soc., 1993, **117**(4): 947—950.

[8] POMMERENKE CH. *Univalent functions* [M]. Vandenhoeck and Ruprecht, Göttingen, 1975.

The Fekete-Szegö Inequality for Strongly Quasi-Starlike Functions

LIU Ming-sheng

(Dept. of Math., South China Normal University, Guangzhou 510631, China)

Abstract: Let $T(\beta)$ denote the class of strongly quasi-starlike functions of order β, and let $f(z)=z+a_2z^2+a_3z^3+\cdots\in T(\beta)$. In this paper, we obtained the sharp upper bounds of $|a_3-\mu a_2^2|$ for any real parameter μ.

Key words: quasi-convex function; strongly quasi-starlike function; close-to-convex function; Fekete-Szegö inequality.