第 20 卷第 4 期
2000年11月
数 学 研 究 与 评 论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION
Vol. 20 No. 4
Nov. 2000

关于(g,f)-2-消去图*

汪长平， 纪昌明[2]

(武汉水利电力大学数学物理系，430072)

摘 要：一个图G称为一个(g,f)-2-消去图，如果G的任何两条边不属于它的一个(g,f)-因子. 本文给出了当$g<f$时一个图是(g,f)-2-消去图的一个充要条件.

关键词：图；因子；消去图.

分类号：AMS(1991) 05C70/CLC O157.5

文献标识码：A　　**文章编号**：1000-341X(2000)04-0623-04

1 前 言

本文所考虑的图皆为有限无向简单图. 设G是一个图，分别用$V(G)$和$E(G)$表示图G的顶点集和边集，用$d_G(x)$表示顶点x在G中的次数. 设g,f是定义在$V(G)$上的两个整数值函数且对每个$x\in V(G)$有$g(x)\leqslant f(x)$，则图G的一个(g,f)－因子是G的一个支撑子图F，使得对每个$x\in V(F)$有$g(x)\leqslant d_F(x)\leqslant f(x)$. 若对任意$x\in V(G)$有$g(x)<f(x)$，以下则简记为$g<f$. 设$S\subseteq V(G)$，$G[S]$则表示$G$的由$S$导出的子图且记$G-S=G[V(G)\backslash S]$. 若$E_1\subseteq E(G)$，用$G-E_1$表示从$G$中去掉$E_1$中的全部边而所得到的图.

设S和T是$V(G)$的不相交子集，用$e_G(S,T)$表示G中连接S和T的边数目. 设C是$G-(S\cup T)$的一个分支且对所有$x\in V(C)$有$g(x)=f(x)$，则根据$e_G(T,V(C))+\sum_{x\in V(C)}f(x)$是奇数或偶数称$C$是$G-(S\cup T)$的$(S,T)$奇分支或偶分支. 否则，称$C$是$G-(S\cup T)$的$(S,T)$中分支. 用$h_G(S,T)$表示$G-(S\cup T)$的$(S,T)$奇分支数并且记

$$\delta_G(S,T)=\sum_{x\in T}d_{G-S}(x)-\sum_{x\in T}g(x)+\sum_{x\in S}f(x)-h_G(S,T).$$

在 1970 年，Lovasz 得到了以下结果.

引理 1.1[1] 设G是一个图，g和f是定义在$V(G)$上的两个整数值函数且对于每一个$x\in V(G)$有$g(x)\leqslant f(x)$，则G有一个(g,f)-因子当且仅当对$V(G)$的所有不相交顶点子集S和T成立$\delta_G(S,T)\geqslant 0$.

在 1994 年刘桂真教授[2]引进了(g,f)-消去图的概念，就是：如果图G的每条边不属于它

* 收稿日期：1997-07-02；修订日期：1999-07-09

基金项目：国家自然科学基金(59579012)、国家教委优秀教师基金和湖北省自然科学基金资助项目(970150)

作者简介：汪长平(1968-)，男，湖北公安县人，硕士，武汉水利电力大学副教授.

的一个(g,f)-因子，则称图G是一个(g,f)-消去图，并且给出了一个图是(g,f)-消去图的一个充要条件. 在这里推广这一概念如下：如果G的任何两条边都不属于它的一个(g,f)-因子，则称G是一个(g,f)-2-消去图.

本文将给出当$g<f$时一个图是(g,f)-2-消去图的一个充要条件.

2 (g,f)-2-消去图

在本节我们将导出(g,f)-2-消去图的充要条件.

设S,T是两个不相交顶点子集，定义$\varepsilon(S,T)$如下，令$U=V(G)\backslash(S\cup T)$：

$\varepsilon(S,T)=4$，如果$G[T]$中至少有两条边；

$\varepsilon(S,T)=3$，如果$G[T]$中仅有一条边，并且$e_G(T,U)\geqslant 1$；

$\varepsilon(S,T)=2$，如果上面都不满足且$G[T]$中仅有一条边或者$e_G(T,U)\geqslant 2$；

$\varepsilon(S,T)=1$，如果上述三种情形不出现并且有$e_G(T,U)\geqslant 1$；否则，$\varepsilon(S,T)=0$.

当$g<f$时，我们知道$G-(S\cup T)$的任何一个分支C都是(S,T)中分支，即

$$h_G(S,T)=0.$$

定理 2.1 设G是一个图，g和f是定义在$V(G)$上的两个整数值函数且$g<f$，则G是一个(g,f)-2-消去图当且仅当对于所有不相交顶点子集S和T有

$$\delta_G(S,T)=\sum_{x\in T}d_{G-S}(x)-\sum_{x\in T}g(x)+\sum_{x\in S}f(x)\geqslant\varepsilon(S,T). \tag{2.1}$$

证明 设$e_i=u_iv_i, i=1,2$为图G的任意两条边，且记$G'=G-e_1-e_2$. 很明显，G有一个(g,f)-因子不包含e_1和$e_2\Leftrightarrow$图G'有一个(g,f)-因子. 根据引理1.1，只需证明对所有不相交顶点子集S和T有：

$$\delta_{G'}(S,T)=\sum_{x\in T}d_{G'-S}(x)-\sum_{x\in T}g(x)+\sum_{x\in S}f(x)\geqslant 0. \tag{2.2}$$

(因为$g<f$，所以此时$h_{G'}(S,T)=0$)

下面，考虑六种情形. 令$U=V(G)\backslash(S\cup T)$.

Ⅰ. $u_1\in T, v_1\in T$.

Ⅰ-1. $u_2\in T, v_2\in T$，这时，$\sum_{x\in T}d_{G'-S}(x)=\sum_{x\in T}d_{G-S}(x)-4$，从而可得：

$$\delta_{G'}(S,T)=\delta_G(S,T)-4.$$

Ⅰ-2. $u_2\in T, v_2\notin T$.

Ⅰ-2.1. $v_2\in S$，

$$\begin{aligned}\delta_{G'}(S,T)&=\sum_{x\in T}d_{G'-S}(x)-\sum_{x\in T}g(x)+\sum_{x\in S}f(x)\\&=\sum_{x\in T}d_{G-S}(x)-2-\sum_{x\in T}g(x)+\sum_{x\in S}f(x)=\delta_G(S,T)-2.\end{aligned}$$

Ⅰ-2.2. $v_2\in U$，因为此时$\sum_{x\in T}d_{G'-S}(x)=\sum_{x\in T}d_{G-S}(x)-3$，所以

$$\delta_{G'}(S,T)=\delta_G(S,T)-3.$$

Ⅰ-3. $u_2,v_2\notin T$，这时，由于$\sum_{x\in T}d_{G'-S}(x)=\sum_{x\in T}d_{G-S}(x)-2$，从而

$$\delta_{G'}(S,T)=\delta_G(S,T)-2.$$

Ⅱ. $u_1\in T, v_1\in S$

Ⅱ-1. $u_2,v_2\in T$,

$$\begin{aligned}\delta_{G'}(S,T)&=\sum_{x\in T}d_{G'-S}(x)-\sum_{x\in T}g(x)+\sum_{x\in S}f(x)\\&=\sum_{x\in T}d_{G-S}(x)-2-\sum_{x\in T}g(x)+\sum_{x\in S}f(x)=\delta_G(S,T)-2\end{aligned}$$

Ⅱ-2. $u_2\in T, v_2\notin T$

Ⅱ-2.1. $v_2\in S$，这时，因为 $\sum_{x\in T}d_{G'-S}(x)=\sum_{x\in T}d_{G-S}(x)$，于是 $\delta_{G'}(S,T)=\delta_G(S,T)$.

Ⅱ-2.2. $v_2\in U$，因为 $\sum_{x\in T}d_{G'-S}(x)=\sum_{x\in T}d_{G-S}(x)-1$，所以

$$\delta_{G'}(S,T)=\delta_G(S,T)-1.$$

Ⅱ-3. $u_2,v_2\notin T$，这时，由于有 $\sum_{x\in T}d_{G'-S}(x)=\sum_{x\in T}d_{G-S}(x)$，所以，$\delta_{G'}(S,T)=\delta_G(S,T)$.

Ⅲ. $u_1\in T, v_1\in U$

Ⅲ-1. $u_2,v_2\in T$，这时，$\sum_{x\in T}d_{G'-S}(x)=\sum_{x\in T}d_{G-S}(x)-3$. 从而 $\delta_{G'}(S,T)=\delta_G(S,T)-3$.

Ⅲ-2. $u_2\in T, v_2\notin T$.

Ⅲ-2.1. $v_2\in S$，这时，$\sum_{x\in T}d_{G'-S}(x)=\sum_{x\in T}d_{G-S}(x)-1$. 从而

$$\delta_{G'}(S,T)=\delta_G(S,T)-1.$$

Ⅲ-2.2. $v_2\in U$

$$\begin{aligned}\delta_{G'}(S,T)&=\sum_{x\in T}d_{G'-S}(x)-\sum_{x\in T}g(x)+\sum_{x\in S}f(x)\\&=\sum_{x\in T}d_{G-S}(x)-2-\sum_{x\in T}g(x)+\sum_{x\in S}f(x)=\delta_G(S,T)-2\end{aligned}$$

Ⅲ-3. $u_2,v_2\notin T$，因为 $\Sigma_{x\in T}d_{G'-S}(x)=\Sigma_{x\in T}d_{G-S}(x)-1$，所以 $\delta_{G'}(S,T)=\delta_G(S,T)-1$.

Ⅳ. $u_1,v_1\in S$.

Ⅳ-1. $u_2,v_2\in T$,

$$\begin{aligned}\delta_{G'}(S,T)&=\sum_{x\in T}d_{G'-S}(x)-\sum_{x\in T}g(x)+\sum_{x\in S}f(x)\\&=\sum_{x\in T}d_{G-S}(x)-2-\sum_{x\in T}g(x)+\sum_{x\in S}f(x)=\delta_G(S,T)-2\end{aligned}$$

Ⅳ-2. $u_2\in T, v_2\notin T$.

Ⅳ-2.1. $v_2\in S$，这时，$\sum_{x\in T}d_{G'-S}(x)=\sum_{x\in T}d_{G-S}(x)$，因而 $\delta_{G'}(S,T)=\delta_G(S,T)$.

Ⅳ-2.2. $v_2\in U$,

$$\begin{aligned}\delta_{G'}(S,T)&=\sum_{x\in T}d_{G'-S}(x)-\sum_{x\in T}g(x)+\sum_{x\in S}f(x)\\&=\sum_{x\in T}d_{G-S}(x)-1-\sum_{x\in T}g(x)+\sum_{x\in S}f(x)=\delta_G(S,T)-1\end{aligned}$$

Ⅳ-3. $u_2,v_2\notin T$，这时，由于 $\sum_{x\in T}d_{G'-S}(x)=\sum_{x\in T}d_{G-S}(x)$，因而 $\delta_{G'}(S,T)=\delta_G(S,T)$.

Ⅴ. $u_1\in S, v_1\in U$

Ⅴ-1. $u_2, v_2 \in T$,

$$\begin{aligned}\delta_{G'}(S,T) &= \sum_{x\in T} d_{G'-S}(x) - \sum_{x\in T} g(x) + \sum_{x\in S} f(x)\\ &= \sum_{x\in T} d_{G-S}(x) - 2 - \sum_{x\in T} g(x) + \sum_{x\in S} f(x)\\ &= \delta_G(S,T) - 2\end{aligned}$$

Ⅴ-2. $u_2 \in T, v_2 \notin T$.

Ⅴ-2.1. $v_2 \in S$,

$$\begin{aligned}\delta_{G'}(S,T) &= \sum_{x\in T} d_{G'-S}(x) - \sum_{x\in T} g(x) + \sum_{x\in S} f(x)\\ &= \sum_{x\in T} d_{G-S}(x) - \sum_{x\in T} g(x) + \sum_{x\in S} f(x)\\ &= \delta_G(S,T)\end{aligned}$$

Ⅴ-2.2. $v_2 \in U$. 同Ⅳ-2.2完全类似,有 $\delta_{G'}(S,T)=\delta_G(S,T)-1$.

Ⅴ-3. $u_2, v_2 \notin T$. 同Ⅳ-3完全相似有 $\delta_{G'}(S,T)=\delta_G(S,T)$.

Ⅵ. $u_1, v_1 \in U$.

Ⅵ-1. $u_2, v_2 \in T$. 完全类似Ⅴ-1,可得到 $\delta_{G'}(S,T)=\delta_G(S,T)-2$.

Ⅵ-2. $u_2 \in T, v_2 \notin T$.

Ⅵ-2.1. $v_2 \in S$. 完全类似Ⅴ-2.1,可得到 $\delta_{G'}(S,T)=\delta_G(S,T)$.

Ⅵ-2.2. $v_2 \in U$. 完全类似Ⅴ-2.2可得出 $\delta_{G'}(S,T)=\delta_G(S,T)-1$.

Ⅵ-3. $u_2, v_2 \notin T$,这时, $\sum_{x\in T} d_{G'-S}(x) = \sum_{x\in T} d_{G-S}(x)$,因而 $\delta_{G'}(S,T) = \delta_G(S,T)$.

不难从上面的证明过程可以看出,式(2.2)成立当且仅当式(2.1)成立,定理2.1证毕.

根据定理2.1,易见下述结论是成立的.

推论2.2 设 G 是一个图, g 和 f 是定义在 $V(G)$ 上的两个整数值函数且 $g<f$. 如果对 $V(G)$ 的所有不相交子集 S 和 $T(T\neq\varnothing)$ 有 $\delta_G(S,T)\geqslant 4$,那么 G 是一个 (g,f)-2-消去图.

参考文献:

[1] LOVASZ L. *Subgraphs with prescribed valencies* [J]. J. Comb. Theory, 1970, **8**: 319—416.

[2] 刘桂真. 图的(g,f)-因子和因子分解 [J]. 数学学报, 1994, **37**(2): 230—237.

On (g,f)-2-Deleted Graphs

WANG Changping, JI Chang-ming

(Dept. of Math. & Phys., Wuhan University of Hydraulic & Electric Engineering, 430072, China)

Abstract: A graph G is called a (g,f)-2-deleted graph if every two edges don't belong to a (g,f)-factor. In this paper a necessary and sufficient condition for a graph to be (g,f)-2-deleted is given when $g<f$.

Key words: graph; factor; deleted graph.