第20卷第4期　　数学研究与评论　　Vol. 20 No. 4
2000年11月　　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　　Nov. 2000

关于对数平均的上界和下界*

刘　证
(鞍山钢铁学院数理系，辽宁 114002)

摘　要：本文指出关于对数平均的上界的一项研究工作中存在的错误，并且给出对数平均的一些更精密的上界和下界.

关键词：对数平均；p 次幂平均；上界；下界.
分类号：AMS(1991) 26D/CLC O174.1
文献标识码：A　　**文章编号**：1000-341X(2000)04-0627-04

设 x 和 y 是任何两个不相等的正数，则 x 和 y 的对数平均定义为

$$L = L(x,y) = \frac{x-y}{\ln x - \ln y}.$$

再引入 x 和 y 的 p 次幂平均如下：

$$M_p = M_p(x,y) = \left(\frac{x_p + y_p}{2}\right)^{\frac{1}{p}}, \quad (p \neq 0),$$

$$M_0 = \lim_{p\to 0} M_p = \sqrt{xy},$$

M_p 是关于 p 连续的严格单调增函数($x \neq y$)[1].

1974年，Tung-Po Lin 在文[2]中证明了使不等式

$$M_p < L < M_q$$

成立的最小 q 值和最大 p 值分别为 $p = 0$ 和 $q = \frac{1}{3}$. 于是，有著名的不等式

$$M_0 < L < M_{\frac{1}{3}}. \tag{1}$$

此后，即开始了关于不等式(1)如何加细的问题的研究. 1990年，陈计和王振关于对数平均的下界给出了一个很好的结果. 在文[3]中证明了对于任何实数 p 都有

$$M_0^p M_p^{1-p} < L. \tag{2}$$

应该进一步明确的是只有当 $0 < p < 1$ 时才有

$$M_0^p M_p^{1-p} > M_0,$$

即(2)式中的下界比(1)式中的下界更精密.

但是，1996年出现的文[4]在关于对数平均的上界的研究中却由于明显的疏忽而产生了

* 收稿日期：1997-11-03
作者简介：刘　证(1934-)，男，上海市人，鞍山钢铁学院教授.

一个错误.仍设 x 和 y 是两个不相等的正数,文[4]根据

$$T_r(x,y)=\begin{cases}L(x,y), & \text{当 } r=-1 \text{ 时},\\ \left[\dfrac{y^{r+1}-x^{r+1}}{(r+1)(y-x)}\right]^{\frac{1}{r}}, & \text{当 } r\neq -1,0 \text{ 时}\end{cases}$$

是关于 r 的严格单调增函数证明了对 $p>0$ 有

$$L(x,y)<\left[\frac{y-x}{(1+p)(y^{\frac{1}{1+p}}-x^{\frac{1}{1+p}})}\right]^{\frac{1+p}{p}}. \tag{3}$$

同时断言(3)式中的上界比(1)式中的上界更好,即更精密.然而,在文[4]中找不到上述这两个上界的真正比较,唯一的理由似乎是该文中的最后一句话,即当 p 充分大时,(3)式中的上界 $T_{-\frac{p}{p+1}}(x,y)$ 可以充分地从右边靠近 $L(x,y)$.这是一个明显的疏忽.事实是根本不可能证明(3)式中的上界比(1)式中的上界更精密.

定理1 若 $p>0$,则存在 $x,y>0$ 使得 $T_{-\frac{p}{p+1}}(x,y)>M_{\frac{1}{3}}(x,y)$.

证明 设 $0<u<1$,令 $x=1-u,y=1$,则不难求得

$$M_{\frac{1}{3}}(1-u,1)=1-\frac{u}{2}-\frac{u^2}{12}+0(u^3),$$

$$T_{-\frac{p}{p+1}}(1-u,1)=1-\frac{u}{2}-\frac{(2p+1)u^2}{24(p+1)}+0(u^3).$$

显然,对于任何 $p>0$ 都有 $-\dfrac{2p+1}{24(p+1)}>-\dfrac{1}{12}$ 由此推得只要 u 相当小就有

$$T_{-\frac{p}{p+1}}(1-u,1)>M_{\frac{1}{3}}(1-u,1).$$

下面,我们将给出对数平均的一些比(1)式所示更精密的上界和下界.

定理2 设 x 和 y 是任何两个不相等的正数,则

$$M_0<(xy)^{\frac{1}{4}}\frac{x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}}{2}<L<\frac{x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}}{2}\left(\frac{x^{\frac{1}{6}}+y^{\frac{1}{6}}}{2}\right)^3<M_{\frac{1}{3}}. \tag{4}$$

证明 在(1)式中,以 $\sqrt{x}$ 和 $\sqrt{y}$ 分别代替 x 和 y,得

$$(xy)^{\frac{1}{4}}<\frac{2(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{\ln x-\ln y}<\left(\frac{x^{\frac{1}{6}}+y^{\frac{1}{6}}}{2}\right)^3.$$

同时乘以 $\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{2}$ 即有(4)式的中间部分.(4)式左边外侧的不等式是明显的.只需证明(4)式右边外侧的不等式.因为对于任何 $a\neq b$ 都有 $(a-b)^3(a^3-b^3)>0$,所以 $(x^{\frac{1}{6}}-y^{\frac{1}{6}})^3(x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}})>0$.由此,$(x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}})^3>3x^{\frac{5}{6}}y^{\frac{1}{6}}+2x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}+3x^{\frac{1}{6}}y^{\frac{5}{6}}$,从而推得

$$\frac{x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}}{2}\left(\frac{x^{\frac{1}{6}}+y^{\frac{1}{6}}}{2}\right)^3<\left(\frac{x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}}}{2}\right)^3.$$

定理3 设 x 和 y 是任何两个不相等的正数,则

$$\frac{x^{\frac{1}{3}}y+xy^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}}}<L. \tag{5}$$

证明 对 $t\geqslant 1$,令 $f(t)=3\ln t-\dfrac{(t^3-1)(t+1)}{t(t^2+1)}$,则不难求得

$$f'(t) = -\frac{(t-1)^3(t^3-1)}{t^2(t^2+1)^2}.$$

故当 $t>1$ 时,$f'(t)<0$. 因为 $f(1)=0$,所以当 $t>1$ 时,$f(t)<0$. 不失一般性可设 $0<y<x$,再取 $t=\frac{x^{\frac{1}{3}}}{y^{\frac{1}{3}}}$,即有 $f(\frac{x^{\frac{1}{3}}}{y^{\frac{1}{3}}})<0$. 由此推得(5)式成立.

注 1 (5)式所给对数平均的下界也比(1)式中的下界更精密,因为由 $(x^{\frac{1}{6}}-y^{\frac{1}{6}})(x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}})>0$ 可以推得 $x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}<\frac{x^{\frac{1}{3}}y+xy^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}}}$. 但是(5)式中的下界与(4)式左边内侧的下界

$$(xy)^{\frac{1}{4}}\frac{x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}}{2}$$

是不可比较的.

现在考虑更一般的情形. 设 x 和 y 是任何两个不相等的正数. 对于任何实数 $p\neq 0$,定义

$$G_p=G_p(x,y)=p(xy)^{\frac{p}{2}}\frac{x-y}{x^p-y^p},$$

$$H_p=H_p(x,y)=p\left(\frac{x^{\frac{p}{3}}+y^{\frac{p}{3}}}{2}\right)^3\frac{x-y}{x^p-y^p}.$$

如果再定义 $G_0(x,y)=H_0(x,y)=L(x,y)$,则容易证明 G_p 和 H_p 都是关于 p 的连续函数. 同时,不难看出 G_p 和 H_p 都是关于 p 的偶函数且取值都是正的.

定理 4 设 x 和 y 是任何两个不相等的正数且 p 是任何不等于零的实数,则

$$G_p<L<H_p, \tag{6}$$

且 G_p 和 H_p 分别是关于 $|p|$ 的严格递减函数和严格递增函数.

证明 在(1)式中,以 x^p 和 y^p 分别代替 x 和 y,再同时乘以正数 $\frac{p(x-y)}{x^p-y^p}$,即得(6)式.

在文[5]中已经证明了 G_p 是关于 $|p|$ 的严格递减函数. 我们来证明 H_p 是关于 $|p|$ 的严格递增函数. 由微分法求得

$$p\frac{\mathrm{d}H_p}{\mathrm{d}p}=H_p\left(1-\frac{x^{\frac{p}{3}}y^p+x^py^{\frac{p}{3}}}{x^{\frac{p}{3}}+y^{\frac{p}{3}}}\frac{\ln x^p-\ln y^p}{x^p-y^p}\right).$$

根据定理 3 有 $\frac{x^{\frac{p}{3}}y^p+x^py^{\frac{p}{3}}}{x^{\frac{p}{3}}+y^{\frac{p}{3}}}<\frac{x^p-y^p}{\ln x^p-\ln y^p}$ 即得 $p\frac{\mathrm{d}H_p}{\mathrm{d}p}>0$. 故 H_p 关于 $|p|$ 是严格递增的.

推论 设 x 和 y 是任何两个不相等的正数且 n 是正整数,则

$$(xy)^{2^{-n-1}}\prod_{m=1}^{n}\alpha_m(x,y)<L<\left(\frac{x^{-2^n\cdot 3}+y^{-2^n\cdot 3}}{2}\right)^3\prod_{m=1}^{n}\alpha_m(x,y), \tag{7}$$

其中 $\alpha_m(x,y)=\frac{x^{2^{-m}}+y^{2^{-m}}}{2}$.

证明 在定理 4 中取 $p=2^{-n}$ 并注意

$$x-y=(x^{2^{-n}}-y^{2^{-n}})\prod_{m=1}^{n}(x^{2^{-m}}+y^{2^{-m}}).$$

不等式(7)当 $n=0$ 时即为(1)式,当 $n=1$ 时即为(4)式的中间部分,而当 $n\to\infty$ 时即得

$$L(x,y) = \prod_{m=1}^{\infty} a_m(x,y).$$

注 2 因为 $H_1 = M_{\frac{1}{3}}$,所以当 $0 < |p| < 1$ 时 $H_p < M_{\frac{1}{3}}$. 因为 $G_1 = M_0$,所以当 $0 < |p| < 1$ 时有 $G_p > M_0$.

注 3 对于任何两个不相等的正数,引入 Stolarsky 平均

$$S_p = S_p(x,y) = \left[\frac{x^p - y^p}{p(x-y)}\right]^{\frac{1}{p-1}}, \quad p \neq 0,1,$$

$$S_0 = \lim_{p\to 0} S_p = L(x,y),$$

则(6)式可以写成为 $M_0^p S_p^{1-p} < L < M_{\frac{p}{3}}^p S_p^{1-p}$. 由文[6]的定理3.3可知,当 $0 < p < \frac{1}{2}$ 时,有 $M_p < S_p$,当 $\frac{1}{2} < p < 1$ 时有 $M_p > S_p$. 故当 $0 < p < \frac{1}{2}$ 时有 $M_0^p S_p^{1-p} > M_0^p M_p^{1-p}$,当 $\frac{1}{2} < p < 1$ 时,有 $M_0^p S_p^{1-p} < M_0^p M_p^{1-p}$,即当 $0 < p < \frac{1}{2}$ 时(6)式中的下界比(2)式中的下界更精密,而当 $\frac{1}{2} < p < 1$ 时正好相反.

参考文献:

[1] BECKENBACH E F and BELLMAN R. *Inequalities* [M]. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1961.

[2] LIN T P. *The Power mean and the logarithmic mean* [J]. Amer. Math. Monthly, 1974, **81**: 879—883.

[3] 陈计,王振. 关于对数平均的下界 [J]. 成都科技大学学报, 1990, **2**: 100—102.

[4] 代立新,陈彰栋. 关于对数平均的上界 [J]. 数学杂志, 1996, **2**: 231—232.

[5] CARLSON B C. *The logarithmic mean* [J]. Amer. Math. Monthly, 1972, **79**: 615—618.

[6] VAMANAMURTHY M K and VUORINEN M. *Inequalities for means* [J]. J. Math. Anal. Appl., 1994, **183**: 155—166.

On the Upper Bound and Lower Bound of the Logarithmic Mean

LIU Zheng

(Dept. of Math. & Phy., Anshan Inst. of I. & S. Tech., Liaoning 114002, China)

Abstract: In this paper, we point out a mistake in [4], and give some upper bounds and lower bounds of the logarithmic mean which are more accurate than a well-known result.

Key words: logrithmic mean; pth power mean; upper bound; lower bound.