第20卷第4期　数学研究与评论　Vol. 20 No. 4
2000年11月　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　Nov. 2000

几个未解决的不定方程问题*

袁 平 之
(长沙铁道学院数力系，410075)

摘　要：本文介绍了五个未解决的不定方程问题，并用代数数论中的有关知识指出“K_4 单群的几个 Diophantine 方程问题”等四篇文献中所有主要结论的证明是错误的.

关键词：分圆域；单位；指数不定方程.
分类号：AMS(1991) 11D61/CLC O156.7
文献标识码：A　　**文章编号**：1000-341X(2000)04-0631-02

代数和组合中的许多问题可以归结为对指数不定方程：

$$\frac{x^m-1}{x-1}=y^n,\quad m>1,n>1,2|n \tag{1}$$

的整数解的研究，为此，Shorey 和 Tijdeman[1]在他们关于指数不定方程的专著的第十二章中猜测：不定方程(1)仅有有限多组整数解. 与此相关的更为精细的问题我们罗列如下，设Z,N,Q,R,P,C 分别表示全体整数，正整数，有理数，实数，奇素数，复数的集合. 对于互素的正整数 a,b，设 $\mathrm{ord}_b a$ 表示使 $a^r\equiv 1(\mathrm{mod}\, b)$的最小正整数.

问题 1([3]A3)　求 $10^m-1=9q^n,q\in P,n>1,m,n\in N$ 的全部解？

问题 2([3]D10)　求 $3^m-1=2q^n,q\in P,n>1,m,n\in N$ 的全部解？

问题 3[2]　求 $2^m+1=3q^n$ 和 $3^m+1=4q^n$，$q\in P,n>1,m,n\in N$ 的全部解？

问题 4[4]　求方程(1)的适合 $m\equiv 1(\mathrm{mod}\, n)$的全部解？

问题 5[11]　设 y 为素数或素数幂且(x,y,m,n)是(1)的解，则 $n=\mathrm{ord}_x y$(猜测).

利用 Baker 有效方法，人们早已知道上述前四个问题仅有有限组解，并可有效计算[1]，但计算量大大超过目前的计算水平，因此完整地解决这五个问题是很有意义的工作，也是许多专家一直关心的问题. 研究表明，这五个问题最终可归结为对方程(1)的适合 $y\equiv 1(\mathrm{mod}\, x)$这一情形去研究. 对此，[5]有过很好的工作，结合超几何函数方法，Baker 有效方法他证明了：若 $x\in P$ 且 $y\equiv 1(\mathrm{mod}\, x)$，则(1)只有有限多组解. 但文[5]有一些可以更正的错误，受此文影响，[6]证明了：若 $y\equiv 1(\mathrm{mod}\, x)$，则方程(1)只有有限多组解，并可有效计算.

最近，[7]中证明了方程(1)无适合$(n,x\phi(x))=1$ 的整数解，此处 $\phi(x)$为 Euler 函数，利用这一结果，文献[7]，[9]和[10]完全解决了上面所述的五个问题. 本文的主要目的之一是用

* 收稿日期：1997-09-22；修订日期：1999-08-15
基金项目：国家自然科学基金(19671060)和湖南省教委基金资助项目(97B04)
作者简介：袁平之(1966-)，男，湖南人，博士，长沙铁道学院教授.

代数数论的基本知识说明[7]中主要结论证明中的错误，由此说明[9]和[10]中主要结论证明的错误.

设 p 为奇素数，a 不是 p 次幂，$\theta=a^{\frac{1}{p}}$，$k=Q(\theta)$，$\zeta=e^{\frac{2\pi i}{p}}$，$U_k$ 表示 K 的单位群，在[7]中主要定理证明中有：如果 $\varepsilon\in U_k$

$$\varepsilon=\varepsilon(\theta)=a_0+a_1\theta+\cdots+a_{p-1}\theta^{p-1},\quad a_0,a_1,\cdots,a_{p-1}\in \boldsymbol{Q}, \tag{2}$$

$$\varepsilon(\theta\zeta)=a_0+a_1(\theta\zeta)+\cdots+a_{p-1}(\theta\zeta)^{p-1}=\zeta^l\eta,0\leqslant l\leqslant p-1, \tag{3}$$

这里 η 是 $L=Q(\theta,\zeta)$ 的实单位，即[7]中(12)和(13)式，(3)式中后一个等式见[7]中 P95 倒 8 行. 然而(3)是完全错误的，事实上，对(3)式取复共轭得(下式亦见[7]中 P94 倒 7 行)

$$a_0+a_1(\theta\zeta^{-1})+\cdots+a_{p-1}(\theta\zeta^{-1})^{p-1}=\zeta^{-l}\eta. \tag{4}$$

由(3)，(4)得

$$\frac{a_0+a_1(\theta\zeta)+\cdots+a_{p-1}(\theta\zeta)^{p-1}}{a_0+a_1(\theta\zeta^{-1})+\cdots+a_{p-1}(\theta\zeta^{-1})^{p-1}}=\zeta^{2l}. \tag{5}$$

由(5)及 $\{\theta^i\zeta^j\}_{i=0,\cdots,j=0,\cdots,p-2}$ 是 L/Q 的一组基得：$a_0,\cdots,a_{p-1}$ 中至多有一个不为 0，再由(2)得：$a_0=\pm1$，$a_j=0$，$j=1,\cdots,p-1$，也就是说 K 中除 ±1 外没有别的单位，这显然与著名的 Dirichlet 单位定理矛盾.

以上说明了文[7]中主要结论证明是错误的，从而完全依赖于此定理及其证明的文献[7]－[10]四篇文献中所有主要结论的证明的是错误的，因此本文讲到的五个问题仍是未解决的公开问题.

参考文献：

[1] SHOREY T N and TIJDEMAN R. *Exponential Diphantine Equations* [M]. Cambridge University Press, 1986.

[2] 施武杰. 关于单 K_4-群 [J]. 科学通报, 1991, **36**(12): 1281－1283.

[3] GUY R K. *Unsolved Proglem in Number Theory* [M]. Springer-Verlag, 1981.

[4] SHOREY T N. *Perfect powers in values of certain polynomials at integer points* [J]. Math. Proc. Cambridge Philos. Soc., 1986, **99**: 195－207.

[5] 乐茂华. 关于丢番图方程 $(x^m-1)/(x-1)=y^n$ [J]. 数学学报, 1993, **36**(5): 590－599.

[6] 袁平之. 关于不定方程 $(x^m-1)/(x-1)=y^n$ 的一个注记 [J]. 数学学报, 1996, **29**(2): 184－189.

[7] LE M H. *A note on perfect powers of the form* $x^{m-1}+\cdots+x+1$ [J]. Acta Arith., 1995, **69**: 91－99.

[8] 乐茂华. *On the prime solution of the diophantine equation* $(x^m-1)/(x-1)=y^n$[J]. 数学进展, 1994, **23**(5): 472.

[9] LI Yu and LE M H. *On the diophantine equation* $(x^m-1)/(x-1)=y^n$[J]. Acta Arith., 1995, **73**: 363－366.

[10] 乐茂华,等. K_4 单群的几个 *Diophantine* 方程问题 [J]. 中国科学(A 辑), 1996, **26**: 769－773.

[11] EDGAR H. *Problems and some results concerning the diophantine equation* $1+A+\cdots+A^{x-1}=p^y$[J]. Rocky Mountain J. Math., 1985, **15**: 327－329.