一阶中立型时滞微分方程的振动定理*

周 勇[1]， 俞元洪[2]
(1. 湘潭大学数学系，湖南 湘潭 411105；2. 中国科学院应用数学研究所，北京 100080)

摘 要：本文证明了常系数一阶中立型微分方程的一个新的振动定理，推广和改进了文献中的若干结果.

关键词：中立型方程；特征方程；振动准则.
分类号：AMS(1991) 24K15,34C10/CLC O175.5
文献标识码：A **文章编号**：1000-341X(2001)01-0086-03

中立型时滞微分方程理论较不带中立型项的时滞微分方程的理论要复杂得多．例如，一个中立型方程它的一切特征根均有负实部，它仍可能有无界解[1]．但是，中立型微分方程在许多领域中有着广泛的应用[2,3]，因此它的振动理论也受到普遍的重视，推荐与本文有关的工作，可参看文[4－7]及其引文．

考虑下列微分方程

$$[x(t)-px(t-\tau)]'+qx(t-\sigma)=0, t\geqslant t_0, \tag{1}$$

其中 t_0 是某一正数且 p,q,τ,σ 是正常数．

本文目的是建立方程(1)一切解振动的新的充分条件．

定义 1 设 $\rho=\max\{\tau,\sigma\}$，若 $x(t)\in C([t_0-\rho,\infty),R)$ 使得 $x(t)-px(t-\tau)\in C^1([t_0,\infty),R)$ 且满足方程(1)，则称 $x(t)$ 为方程(1)的解．

定义 2 若方程(1)的一个解 $x(t)$ 有任意大的零点，则称它是振动的．

知道，方程(1)的一切解均为振动的必要充分条件是它的特征方程

$$f(\lambda)\equiv\lambda-p\lambda e^{-\lambda\tau}+qe^{-\lambda\sigma}=0 \tag{2}$$

无实根[1]．本文的主要结果如下：

定理 设 $p\in(0,1)$，且

$$q\sigma e>1-p\{1+\frac{q\tau}{1-p}+\frac{(q\tau)^2}{2(1-p)^2}\}, \tag{3}$$

则方程(1)的一切解振动．

证明 只需证明在定理的条件下特征方程(2)无实根．显然，有 $f(\lambda)>0$，当 $\lambda\geqslant 0$，因此，

* 收稿日期：1998-04-28；修订日期：1999-12-02
基金项目：国家自然科学基金资助项目(19871090)
作者简介：周 勇(1964-)，男，湖南长沙人，湘潭大学教授.
E-mail：yzhou@xtu.edu.cn

方程(2)只有负实根．令 $\lambda=-\mu$,其中 $\mu>0$,定义 $g(\mu)$如下

$$g(\mu)=\frac{f(-\mu)}{-\mu}=1-pe^{\mu\tau}-\frac{q}{\mu}e^{\mu\sigma}. \tag{4}$$

现在,只需证明 $g(\mu)=0$ 无正根．

定义函数

$$f_1(\mu)=1-pe^{\mu\tau} \text{ 和 } f_2(\mu)=\frac{q}{\mu}e^{\mu\sigma}. \tag{5}$$

下面证明对任意 $\mu>0$,恒有 $f_2(\mu)>f_1(\mu)$. 注意到函数 $f_2(\mu)$在 $\mu=\frac{1}{\sigma}$处有唯一的极小值 $q\sigma e$.

现在来证明,存在函数 $h(\mu)$使得当 $\mu>0$ 时有

$$f_2(\mu)>h(\mu)>f_1(\mu). \tag{6}$$

定义函数

$$h(\mu)=-\frac{1}{2}p\tau^2\mu^2-p\tau\mu+1-p,\mu>0. \tag{7}$$

有 $h(\mu)-f_1(\mu)=-\frac{1}{2}p\tau^2\mu^2-p\tau\mu+1-p-(1-pe^{\tau\mu})=p(e^{\tau\mu}-\frac{1}{2}\tau^2\mu^2-\tau\mu-1)>0,\mu>0$. 因此 $h(\mu)>f_1(\mu),\mu>0$.

另一方面,由(5)和(7)得到 $f_2(\mu)-h(\mu)=\frac{q}{\mu}e^{\sigma\mu}-(-\frac{1}{2}p\tau^2\mu^2-p\tau\mu+1-p)$.

考虑 $\mu=\frac{1}{\sigma\alpha},\alpha>0$ 时 $f_2(\mu)-h(\mu)$ 的函数值,有

$$[f_2(\mu)-h(\mu)]_{\mu=\frac{1}{\sigma\alpha}}=\sigma\alpha qe^{\frac{1}{\alpha}}+\frac{1}{2}p\tau^2(\frac{1}{\sigma\alpha})^2+\frac{p\tau}{\sigma\alpha}-(1-p)>q\sigma\alpha-(1-p).$$

若 $\alpha>\frac{1-p}{\sigma q}$,则有 $f_2(\mu)-h(\mu)>0,\mu\in(0,\frac{1}{\sigma\alpha})$. 因此有

$$f_2(\mu)-h(\mu)>0,\mu\in(0,\frac{q}{1-p}). \tag{8}$$

其次,当 $\mu\geqslant\frac{q}{1-p}$时,由条件(3)产生

$$f_2(\mu)-h(\mu)\geqslant q\sigma e-\{-\frac{1}{2}p\tau^2(\frac{q}{1-p})^2-\frac{p\tau q}{1-p}+1-p\}$$

$$=q\sigma e-[1-p\{1+\frac{\tau q}{1-p}+\frac{(\tau q)^2}{2(1-p)^2}\}]>0,$$

即有

$$f_2(\mu)-h(\mu)>0,\quad \mu\geqslant\frac{q}{1-p}. \tag{9}$$

联合(8)和(9)有 $f_2(\mu)>h(\mu),\mu>0$. □

注 1　在条件(3)中由于 $q\sigma e>0$,若其右端当 $0<p_1<p<1$ 时为负,则条件(3)可用下面的条件(3)′代替:

$$q\sigma e>1-p\{1+\frac{q\tau}{1-p}+\frac{(q\tau)^2}{2(1-p)^2}\},\quad 0<p<p_1, \tag{3$'$}$$

其中 p_1 是方程 $f(p)\equiv1-p\{1+\frac{q\tau}{1-p}+\frac{(q\tau)^2}{2(1-p)^2}\}=0,0<p<1$ 的解.

注 2　若 $p=0$,则条件(3)简化为 $q\sigma e>1$,上式是时滞方程 $x'(t)+qx(t-\sigma)=0$ 一切解振

动的充要条件．因此，在此意义下条件(3)是精确的．

注 3 本文的定理优于文[5—7]中相应的结果．例如，对于方程

$$[x(t)-\frac{1}{2}x(t-1)]'+\frac{1}{2(2e+1)}x(t-2)=0, \tag{10}$$

易见 $q\sigma e=1-p(1+\frac{q\tau}{1-p})=\frac{e}{2e+1}<\frac{1}{2}$，因此，文[5—7]的结果不适用于方程(10)．但是，由本文定理可以推知方程(10)的一切解均为振动．

可以推广定理的结论到更一般的方程

$$[x(t)-px(t-\tau)]'+\sum_{i=1}^{n}q_ix(t-\sigma_i)=0, t\geqslant t_0, \tag{11}$$

其中 $p,\tau,q_i,\sigma_i,i=1,2,\cdots,n$，是正常数．

推论 设 $p\in(0,1)$，且 $(\sum_{i=1}^{n}q_i\sigma_i)e>1-p\{1+\frac{\tau\sum_{i=1}^{n}q_i}{1-p}+\frac{\tau^2(\sum_{i=1}^{n}q_i)^2}{2(1-p)^2}\}$，则方程(11)的一切解振动．

参考文献：

[1] GYÖRI I, LADAS G. *Oscillation Theory of Delay Differential Equations With Applications* [M]. Oxford Science Publications, 1991.

[2] HALE J. *Theory of Functional Differential Equations* [M]. Springer-Verlag, New York, 1997.

[3] KOLMANVSKII V B and NOSOV V R. *Stability of Functional Differential Equations* [M]. Academic Proess, New York, 1986.

[4] LADAS G and SAVROULAKIS I P. *Oscillations caused by several retarded and andvanced arguments* [J]. J. Differential Equations, 1982, **44**: 134—152.

[5] GOPALSAMY K and ZHANG B G. *Oscillation and nonoscillation in first order nentral differential equations* [J]. J. Math. Anal., Appl., 1990, **151**: 42—57.

[6] LADAS G and SFICAS Y G. *Oscillations of neutral delay differential equations* [J]. Canad. Math. Bull., 1986, **29**: 438—445.

[7] ZHANG B G. *Oscillation of first order neutral functional differential equations* [J]. J. Math. Anal. Appl., 1989, **139**: 311—318.

Oscillation of First Order Neutral Delay Differential Equations

ZHOU Yong[1], YU Yuan-hong[2]

(1. Dept. of Math., Xiangtan University., Hunan 411105, China;
2. Inst. of Appl. Math., Academia Sinica, Beijing 100080, China)

Abstract: In this paper, we establish new sufficient conditions for the oscillation of all solutions of first order neutral delay differential equations. Our results extend and improve some results in the literature.

Key words: neutral equation; oscillation theorem.