$[C(E), C_\alpha(E)]$ 中的唯一原子*

裴 惠 生
(信阳师范学院数学系，河南 信阳 464000)

摘 要：对于集合 X 上的任一非平凡等价关系 E，本文考察了半群 $T_E(X)$ 上的同余 $C_*(E)$，并证明了 $C_*(E)$ 是 $T_E(X)$ 的同余格的完全子格 $[C(E), C_\alpha(E)]$ 中的唯一原子.

关键词：半群；同余格；原子.
分类号：AMS(1991) 20M20/CLC O157.2
文献标识码：A **文章编号**：1000-341X(2001)01-0117-06

1 引言和准备

设 X 为非空集合，$|X| > 2$. $\mathscr{T}_X$ 为 X 上的全变换半群. 记 $Z(X)$ 为由 X 上单位映射和所有的常值映射构成的 $\mathscr{T}_X$ 的子半群. 称 $\mathscr{T}_X$ 的一个子半群 $T(X)$ 为一个 α 半群，如果 $T(X)$ 包含 $Z(X)$. X 上的等价关系 E 被称为一个 T 等价关系，如果对于 α 半群 $T(X)$ 中每个 f 和所有的 $(x,y) \in E$，都有 $(f(x), f(y)) \in E$. 据[1]，X 上所有的 T 等价关系作成一个完全格，记为 $\mathrm{Teq}(X)$. 根据[1]和[3]，对 $T(X)$ 上每个同余 σ，令

$$\gamma(\sigma) = \{(x,y) \in X \times X : (\langle x \rangle, \langle y \rangle) \in \sigma\},$$

则 $\gamma(\sigma) \in \mathrm{Teq}(X)$. 同时，对每个 $E \in \mathrm{Teq}(X)$，令

$$C(E) = \{(\langle x \rangle, \langle y \rangle) : (x,y) \in E\} \cup \Delta(T(X)),$$

则 $C(E)$ 是 $T(X)$ 上的一个同余. 且 γ 是从 $T(X)$ 的同余格 $\mathrm{Con}(T(X))$ 到 $\mathrm{Teq}(X)$ 的格同态，C 是从 $\mathrm{Teq}(X)$ 到 $\mathrm{Con}(T(X))$ 的格同态. 并且，对于每个 $E \in \mathrm{Teq}(X)$，$\gamma^{-1}(E)$ 是 $\mathrm{Con}(T(X))$ 的一个完全子格，其最小元素为 $C(E)$，最大元素为 α 同余 $C_\alpha(E)$[2]. 故常把 $\gamma^{-1}(E)$ 写作 $[C(E), C_\alpha(E)]$.

在[3]中，研究过一类由 X 上的等价关系 E 所确定的 α 半群，即

$$T_E(X) = \{f \in \mathscr{T}_X : \forall\ (x,y) \in E, (f(x), f(y)) \in E\}.$$

X 上的 T_E 等价关系恰有三个，它们是 δ, ω 和 E. 这里 δ 为恒等关系，ω 为泛关系.

忆及对于 X 上的每个自映射 h，$\pi(h) = \{h^{-1}(y) : y \in \operatorname{ran} h\}$ 为 X 的一个分解. 在[6]中，

* 收稿日期：1998-03-30；修订日期：1999-11-15
基金项目：河南省自然科学基金资助项目(994052900)
作者简介：裴惠生(1948-)，男，河南潢川县人，信阳师范学院教授.
E-mail：hnpei@public2.lyptt.ha.cn

我们对于 E 是单等价关系(即 $E=(A\times A)\cup\delta$,A 为 X 的多于一点的真子集.)这一特殊情形找到了 $T_E(X)$ 的两个同余 $C_0(E)$ 和 $C_*(E)$,这里

$$C_0(E)=\{(f,g):\pi(f)=\pi(g),\text{ran } f=\text{ran } g=\{a,b\}\subseteq A\}\cup C(E),$$

$$C_*(E)=\{(f,g)\in C_0(E):|f(A)|=|g(A)|=1\}\cup C(E).$$

证明了这两个同余都在完全子格 $[C(E),C_a(E)]$ 之中,并且 $C_*(E)$ 是这个完全子格中的唯一原子.本文中我们将把[6]中的结果推广到一般情形,即 E 是 X 上任一个非平凡的等价关系的情形.文中未作说明的符号和概念请参看[1],[2]和[3].

2 几个引理

设 $T(X)$ 为任一 α 半群,$E\in \text{Teq}(X)$. 在不引起混淆时,令 $\bar{x}$ 表示包含 x 点的 E 等价类.设 A 是一个 E 等价类,若 $a\in A$,则 $A=\bar{a}$. 下边两个结果的证明可参看[6].

引理 2.1 设 $f\in T(X)$,$E\in \text{Teq}(X)$. 那么,对每个 $A\in X/E$,存在 $B\in X/E$,使得 $f(A)\subseteq B$. 于是,对每个 $B\in X/E$,$f^{-1}(B)$ 必为某些 E 类的并集.

引理 2.2 设 $E\in \text{Teq}(X)$,$\sigma\in[C(E),C_a(E)]$ 且 $(u,v)\in\sigma$. 那么对于任意 $A\in X/E$,$u(A)$ 和 $v(A)$ 包含在同一 E 类.于是,如果 $\text{ran } u$ 包含于某个 E 类 B,则 $\text{ran } v$ 也含于 B.

引理 2.3 设 $f,g\in T(X)$ 且 $E\in Teq(X)$,使得 $\pi(f)=\pi(g)$,同时,$\text{ran } f=\text{ran } g=\{a,b\}$ 满足 $(a,b)\in E$. 那么对于任意 $h\in T(X)$,有 $\pi(h\circ f)=\pi(h\circ g)$ 和 $\pi(f\circ h)=\pi(g\circ h)$ 成立.

证明 易验证 $\pi(h\circ f)=\pi(h\circ g)$.

为证 $\pi(f\circ h)=\pi(g\circ h)$,我们先观察一个事实.据假设,$\pi(f)=\pi(g)$,$\text{ran } f=\text{ran } g=\{a,b\}$. 不妨设 $f\neq g$. 于是必定有 $f^{-1}(a)=g^{-1}(b)$ 且 $f^{-1}(b)=g^{-1}(a)$. 如果 $\text{ran } h\subseteq f^{-1}(a)$,那么显然有 $f\circ h=\langle a\rangle$,$g\circ h=\langle b\rangle$ 都是常值映射,$\pi(f\circ h)=\pi(g.h)$. 同样可证明 $\text{ran } h\subseteq f^{-1}(b)$ 的情形.现设 $\text{ran } h\cap f^{-1}(a)\neq\varnothing$ 且 $\text{ran } h\cap f^{-1}(b)\neq\varnothing$. 令

$$A=h^{-1}(\text{ran } h\cap f^{-1}(a)),B=h^{-1}(\text{ran } h\cap f^{-1}(b)),$$

则 $A\cap B=\varnothing$,$A\cup B=X$. 并且 $f\circ h(A)=g\circ h(B)=\{a\}$,$f\circ h(B)=g\circ h(A)=\{b\}$. 于是,$\pi(f\circ h)=\pi(g\circ h)=\{A,B\}$. 证明完成.

引理 2.4 设 $T(X)$ 为任意 α 半群,$E\in \text{Teq}(X)$ 为非平凡等价关系.令

$$C_0(E)=\{(f,g):\pi(f)=\pi(g),\text{ran } f=\text{ran } g=\{a,b\},(a,b)\in E\}\cup C(E).$$

则 $C_0(E)$ 是 $T(X)$ 上一个对应 T 等价关系 E 的同余.

证明 易看出 $C_0(E)$ 为 $T(X)$ 上一个等价关系,故仅须验证它满足左相容性和右相容性.取任意 $(f,g)\in C_0(E)$,$h\in T(X)$,不妨设 $h\notin Z(X)$,$(f,g)\notin C(E)$. 由引理 2.3,

$$\pi(h\circ f)=\pi(h\circ g),\pi(f\circ h)=\pi(g\circ h).$$

再注意到 $(a,b)\in E$,故 $(h(a),h(b))\in E$,

$$\text{ran}(h\circ f)=\text{ran}(h\circ g)=\{h(a),h(b)\}.$$

于是我们有 $(h\circ f,h\circ g)\in C_0(E)$. 同时,据上面引理的证明可见:或者 $(f\circ h,g\circ h)=(\langle a\rangle,\langle b\rangle)\in C(E)\subseteq C_0(E)$,或者 $\text{ran}(f\circ h)=\text{ran}(g\circ h)=\{a,b\}$. 故 $C_0(E)$ 确为 $T(X)$ 上的一

个同余. 至于 $C_0(E)$ 属于 E 所对应的完全子格的验证，是例行公事，略.

引理 2.5 设 $T(X)$ 为任一个 α 半群，$E\in \mathrm{Teq}(X)$，$E\neq\delta,\omega$. 令

$$C_*(E)=\{(f,g)\in C_0(E):\forall A\in X/E,|f(A)|=|g(A)|=1\}\cup C(E).$$

则 $C_*(E)$ 是 $T(X)$ 上的一个与 E 对应的同余，即 $C_*(E)\in[C(E),C_\alpha(E)]$.

证明 用引理 2.4 和引理 2.1，本结论的验证较容易，略.

引理 2.6 设 $T(X)$ 为 α 半群，E 是 X 上一个 T 等价关系，$E\neq\delta,\omega$. 假设 $\sigma\in[C(E),C_*(E)]$ 且 $(u,v)\in\sigma-C(E)$，满足 $\mathrm{ran}\ u,\mathrm{ran}\ v\subseteq A\in X/E$. 那么，$u$ 和 v 至少满足下列五条中的一条.

(2.6.1) u 不是常值映射，$v=\langle a\rangle$，对某个 $a\in A$.

(2.6.2) u,v 都不是常值映射，且存在 $B\in X/E$，使得 $|v(B)|=1,|u(B)|>1$.

(2.6.3) 对任意 $B\in X/E,|u(B)|=|v(B)|=1$，且存在 $D\in X/E$，使 $u(D)=v(D)$.

(2.6.4) 对任意 $B\in X/E,|u(B)|=|v(B)|=1$，但 $u(B)\neq v(B)$.

(2.6.5) 存在某个 $D\in X/E$，使得 $|u(D)|>1$ 且 $|v(D)|>1$.（对称的情形略）

证明 据假设 $\mathrm{ran}\ u\subseteq A$. 由引理 2.2 知 $\mathrm{ran}\ v\subseteq A$. 若 v 为常值映射，则必有(2.6.1)成立. 若 u,v 都不是常值映射，可验证 (u,v) 至少适合后四个条件中的一个，略.

3 主要结果

在本节中，我们考虑的半群都是由 X 上某一非平凡等价关系 E 所决定的 α 半群 $T_E(X)$.

引理 3.1 设 $\sigma\in[C(E),C_\alpha(E)]$. 若存在 $(u,v)\in\sigma-C(E)$，使得 u,v 中恰有一个为常值映射，那么 $C_*(E)\subseteq\sigma$.

证明 不妨设 $v=\langle a\rangle$，u 不是常值映射. 令 $A=\bar{a}$，据引理 2.2 可知 $\mathrm{ran}\ u\subseteq A$. 取任意 $(f,g)\in C_*(E)-C(E)$，设 $\mathrm{ran}\ f=\mathrm{ran}\ g=\{b_1,b_2\}\subseteq B\in X/E$. 再取 $a_1,a_2\in\mathrm{ran}\ u$，取 $c_1\in u^{-1}(a_1)$，$c_2\in u^{-1}(a_2)$. 定义 X 到自身的映射 h 为：$h(x)=c_1$ 若 $x\in f^{-1}(b_1)$；$h(x)=c_2$ 若 $x\in f^{-1}(b_2)$. 注意到 $f^{-1}(b_i)$ 为若干个 E 类的并集，据 $T_E(X)$ 的定义可知 $h\in T_E(X)$. 再定义 X 到自身的映射 k 为：$k(x)=b_1$ 若 $x=a_1$；$k(x)=b_2$ 若 $x\neq a_1$. 同样地，可得 $k\in T_E(X)$. 并且，不难验证，$k\circ u\circ h=f,k\circ v\circ h=g$. 故 $(f,g)=(k\circ u\circ h,k\circ v\circ h)\in\sigma$. 由 (f,g) 的任意性知 $C_*(E)\subseteq\sigma$.

引理 3.2 设 $\sigma\in[C(E),C_\alpha(E)]$. 若存在 $(u,v)\in\sigma-C(E)$，使得 u,v 都不是常值映射，且 $\mathrm{ran}\ u,\mathrm{ran}\ v\subseteq A\in X/E$，并且存在 $B\in X/E$，使得 $|u(B)|>1,|v(B)|=1$. 那么 $C_*(E)\subseteq\sigma$.

证明 取任意 $b\in B$. 定义 X 到自身的映射 h 为：$h(x)=x$ 若 $x\in B$；$h(x)=b$ 若 $x\notin B$. 容易验证 $h\in T_E(X)$ 且 $\mathrm{ran}\ h=B$. 同时 $v\circ h$ 是一个常值映射，而 $u\circ h$ 不是常值映射. 即 $(u\circ h,v\circ h)\in\sigma$ 满足引理 3.1 的条件，故结论成立.

引理 3.3 设 $\sigma\in[C(E),C_\alpha(E)]$. 若存在 $(u,v)\in\sigma-C(E)$，使得 u,v 都不是常值映射，$\mathrm{ran}\ u,\mathrm{ran}\ v\subseteq A\in X/E$；对每个 $B\in X/E$，都有 $|u(B)|=|v(B)|=1$，并且存在 $D\in X/E$ 使得 $u(D)=v(D)=\{a\}(a\in A)$，那么 $C_*(E)\subseteq\sigma$.

证明 取 $d\in D, c\in X-D$, 使 $u(c)\neq v(c)$. 令 $a_1=u(c), a_2=v(c)$, 则 $(a_1,a_2)\in E$. 定义 X 到自身的映射 h 为: $h(x)=d$ 若 $x\in A$; $h(x)=c$ 若 $x\notin A$. 那么 $h\in T_E(X)$ 并且有 $(u\circ h, v\circ h)\in\sigma$. 容易验证 $u\circ h(x)=a$ 若 $x\in A$; $u\circ h(x)=a_1$ 若 $x\notin A$. 同时 $v\circ h(x)=a$ 若 $x\in A$; $v\circ h(x)=a_2$ 若 $x\notin A$. 如果 $a=a_2$, 则 $v\circ h$ 为常值映射而 $u\circ h$ 不是常值映射. 据引理 3.1 有结论成立. 如果 $a=a_1$, 则 $u\circ h$ 为常值映射而 $v\circ h$ 不是常值映射. 同样有结论成立. 如果 $a\notin\{a_1,a_2\}$, 定义 X 到自身的映射 k 为: $k(x)=a_1$ 若 $x=a_1$; $k(x)=a$ 若 $x\neq a_1$. 显然 $k\in T_E(X)$, 并且 $(k\circ u\circ h, k\circ v\circ h)\in\sigma$. 可是, $k\circ v\circ h$ 为常值映射, 而 $k\circ u\circ h$ 不是常值映射. 仍据引理 3.1, 可知 $C_*(E)\subseteq\sigma$.

引理 3.4 设 $\sigma\in[C(E),C_a(E)]$. 若存在 $(u,v)\in\sigma-C(E)$, 使得 u,v 都不是常值映射, $\operatorname{ran} u, \operatorname{ran} v\subseteq A\in X/E$; 对每个 $B\in X/E, u(B), v(B)$ 都是不同的单点集, 则 $C_*(E)\subseteq\sigma$.

证明 分两种情形讨论.

情形 1 存在 B、$D\in X/E$, 使得 $u(B)\neq u(D)$ 且 $v(B)=v(D)$ (对称的情形略).

取 $b\in B, d\in D$. 定义 X 到自身的映射 h 为: $h(x)=b$ 若 $x\in A$; $h(x)=d$, 其他情形. 那么 $h\in T_E(X)$. 并且 $(u\circ h, v\circ h)\in\sigma$. 不难看出 $v\circ h$ 为常值映射, 而 $u\circ h$ 不是常值映射. 据引理 3.1, 结论成立.

情形 2 对任意两个不同的 E 类 B 和 D, 或 $u(B)=u(D), v(B)=v(D)$ 或 $u(B)\neq u(D), v(B)\neq v(D)$.

这里仍有两种可能: (1) $\operatorname{ran} u\neq\operatorname{ran} v$. 不失一般性, 我们可设 $a\in\operatorname{ran} u-\operatorname{ran} v$, 设 $\{a\}=u(B_0)$, 这里 $B_0\in X/E$. 设 $\{a'\}=v(B_0)$. 定义 X 到自身的映射 k 为: $k(x)=a$ 若 $x=a$; $k(x)=a'$ 若 $x\neq a$. 易验证 $k\in T_E(X)$, 同时 $(k\circ u, k\circ v)\in\sigma$. 但是, $k\circ v=\langle a'\rangle$, 而 $k\circ u$ 不是常值映射, 据引理 3.1, 结论成立. (2) $\operatorname{ran} u=\operatorname{ran} v$. 任取 $(f,g)\in C_*(E)-C(E)$. 假设 $\operatorname{ran} f=\operatorname{ran} g=\{b_1,b_2\}\subseteq B\in X/E$, 并设 $u(A)=\{a\}, v(A)=\{a'\}$. 由假设, $a\neq a'$. 再取任一点 $a_1\in\operatorname{ran} u$, 使 $a_1\neq a$. 取 $c\in u^{-1}(a_1)$. 那么 $c\notin A$. 令 $a_1'=v(c)$, 定义 X 到自身的映射 h 为: $h(x)=a$ 若 $x\in f^{-1}(b_1)$; $h(x)=c$ 若 $x\notin f^{-1}(b_1)$. 那么 $h\in T_E(X)$. 再定义 X 到自身的映射 k 为: $k(x)=b_1$ 若 $x\in\{a,a_1'\}$; $k(x)=b_2$, 其他. 不难验证 $k\in T_E(X)$, 并且 $(f,g)=(k\circ u\circ h, k\circ v\circ h)\in\sigma$. 由 (f,g) 的任意性, 有 $C_*(E)\subseteq\sigma$. 证明完毕.

引理 3.5 设 $\sigma\in[C(E),C_a(E)]$. 若存在 $(u,v)\in\sigma-C(E)$, 使得 u,v 都不是常值映射, $\operatorname{ran} u, \operatorname{ran} v\subseteq A\in X/E$, 且存在 $B\in X/E$, 使 $u(B), v(B)$ 都不是单点集, 则 $C_*(E)\subseteq\sigma$.

证明 也分两种情形讨论.

情形 1 对每个 $b\in B, u(b)=v(b)$.

取 $c\in X-B$, 使得 $u(c)\neq v(c)$. 令 $a=u(b_0)=v(b_0)$, 这里 $b_0\in B$ 为取定的一点. 设 $a_1=u(c), a_2=v(c)$. 定义 X 到自身的映射 h 为: $h(x)=b_0$ 若 $x\in B$; $h(x)=c$ 其他. 那么 $h\in T_E(X)$, 且 $u\circ h(x)=a$ 若 $x\in B$; $u\circ h(x)=a_1$ 其他. $v\circ h(x)=a$ 若 $x\in B$; $v\circ h(x)=a_2$ 其他. 显然 $u\circ h\neq v\circ h$. 若 $a_2=a$, 则 $v\circ h$ 为常值映射, 而 $u\circ h$ 不是常值映射. $(u\circ h, v\circ h)\in\sigma$ 满足引理 3.1 的条件, 故结论成立. 类似可证 $a_1=a$ 时结论也成立. 如果 $a_1\neq a\neq a_2$, 则 $(u\circ h, v\circ h)\in\sigma$ 满足引理 3.3 的条件, 结论也成立.

情形 2 存在 $b\in B$ 使得 $u(b)\neq v(b)$.

取 $b'\in B$, 满足 $u(b')\neq u(b)$. 令 $a=u(b), a'=u(b')$; $a_1=v(b), a_1'=v(b')$. 定义 X 到

自身的映射 h：$h(x)=b$ 若 $x\in B$；$h(x)=b'$ 其他. 那么 $h\in T_E(X)$，且 $u\circ h(x)=a$，若 $x\in B$；$u\circ h(x)=a'$ 其他. $v\circ h(x)=a_1$ 若 $x\in B$；$v\circ h(x)=a_1'$ 其他. 由于 $a\neq a_1$，所以 $u\circ h\neq v\circ h$. 显然 $u\circ h$ 不是常值映射. 如果 $a_1'=a_1$，则 $v\circ h$ 为常值映射. $(u\circ h,v\circ h)\in\sigma$ 满足引理 3.1 的条件，这时结论成立. 如果 $a_1'\neq a_1$ 且 $a'=a_1'$，这时 $(u\circ h,v\circ h)\in\sigma$ 满足引理 3.3 的条件，结论仍然成立. 如果 $a_1\neq a_1'\neq a'$，那么 $(u\circ h,v\circ h)\in\sigma$ 满足引理 3.4 的条件，仍有结论成立.

引理 3.6 设 $\sigma\in[C(E),C_a(E)]$. 若存在 $(u,v)\in\sigma-C(E)$，使得 ran u，ran v 都与至少两个 E 类的交不空，则 $C_*(E)\subseteq\sigma$.

证明 取任意 $b\in X$，使得 $u(b)\neq v(b)$. 记 $a_1=u(b)$，$a_2=v(b)$，那么 a_1,a_2 包含于同一 E 类 A. 定义 X 到自身的映射 k 为：$k(x)=x$ 若 $x\in A$；$k(x)=a_2$ 其他. 那么 $k\in T_E(X)$，$(k\circ u,k\circ v)\in\sigma$，并且 $k\circ u\neq k\circ v$，因为 $k\circ u(b)=a_1\neq a_2=k\circ v(b)$. 显然 $k\circ u$ 不是常值映射，并且 ran$(k\circ u)$ 和 ran$(k\circ v)$ 都包含于 A. 据引理 2.6，$(k\circ u,k\circ v)$ 必定满足引理 2.6 中的五个条件中的某一个. 再据上面的五个引理知，无论哪一种情形发生，总有 $C_*(E)\subseteq\sigma$.

现在我们可以来叙述和证明本文的主要结果.

定理 3.7 设 E 为 X 上任意非平凡等价关系. 那么 $C_*(E)$ 是 $T_E(X)$ 上一个同余，且是这个半群同余格的完全子格 $[C(E),C_a(E)]$ 中的唯一原子.

证明 由引理 2.5 知 $C_*(E)$ 是 $T_E(X)$ 上一个同余，且 $C_*(E)\in[C(E),C_a(E)]$. 设 σ 是 $T_E(X)$ 上任一同余，满足 $\sigma\in[C(E),C_a(E)]$ 且 $\sigma\neq C(E)$. 那么存在 $(u,v)\in\sigma-C(E)$. 如果存在 $A\in X/E$，使得 ran u，ran $v\subseteq A$，则 (u,v) 必定满足引理 2.6 中五个条件之一. 于是，引理 3.1 到引理 3.5 可保证 $C_*(E)\subseteq\sigma$ 成立. 如果不存在这样的 E 类 A，使得 ran u，ran $v\subseteq A$，那么据引理 3.6 可知也有 $C_*(E)\subseteq\sigma$ 成立.

忆及 $S(X)$ 表示拓扑空间 X 上所有连续自映射作成的半群.

推论 3.8 设拓扑空间 X 既不是平庸空间，也不是离散空间. X 有一个基 $\mathscr{B}$，使得 $\bigcup\{B:B\in\mathscr{B}\}=X$，对任意 $B,B'\in\mathscr{B}$，$B\cap B'=\varnothing$. 令 $E=\bigcup\{B\times B:B\in\mathscr{B}\}$. 则 E 是 X 上的一个 S- 等价关系，$C_*(E)$ 是 $S(X)$ 上一个同余，且是 $S(X)$ 同余格的完全子格 $[C(E),C_a(E)]$ 中的唯一原子.

证明 据[3]定理 2.8，$T_E(X)$ 恰是拓扑空间 X 上的连续自映射半群 $S(X)$，由定理 3.7 立即可以推出结论成立.

参考文献：

[1] HOFMANN K H and MAGILL K D Jr. *The smallest proper congruence on $S(X)$* [J]. Glasgow Math. J., 1998, **30**: 301—313.

[2] PEI Hui-sheng. *The α-congruences on $S(X)$ and the S-equivalences on X* [J]. Semigroup Forum, 1993, **47**: 48—59.

[3] PEI Hui-sheng. *Equivalences, α-semigroups and α-congruences* [J]. Semigroup Forum, 1994, **49**: 49—58.

[4] PEI Hui-sheng. *A subsemigroup of $S(I)$* [J]. J. of Math. Res. & Expo., 1994, **3**: 345—354.

[5] PEI Hui-sheng and XU Yun-qing. *Congruences on the α-semigroups $T_E(X)$, in "Semigroups"* [J].

Springer, Singapore press, 1998, 57—62.
[6] PEI Hui-sheng. *A congruence on* $T_E(X)$ [J]. J. of Xinyang Teachers' College, 1999, **12**(3): 249—253.

A Unique Atom in $[C(E), C_\alpha(E)]$

PEI Hui-sheng
(Dept. of Math., Xinyang Teacher's College, Henan 464000, China)

Abstract: A congruence $C_*(E)$ on the semigroup $T_E(X)$ is observed in this paper where E is an arbitrary non-trivial equivalence on the set X. It is proved that $C_*(E)$ is a unique atom in the complete sublattice $[C(E), C_*(E)]$ of the congruence lattice of $T_E(X)$.

Key words: semigroup; congruence lattice; atom.