第21卷第1期 数学研究与评论 Vol. 21 No. 1
2001年2月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Feb. 2001

奇异黎曼度量之下的分支问题的 d- 充分性*

高 守 平
(同济大学应用数学系，上海 200092)

摘 要：本文利用奇异黎曼度给出了分支问题是 d-充分性的特征，推广了文献[2]，[4]中的有关结果.

关键词：映射芽；ω-加权 d-等价；ω-加权 d-充分性.
分类号：AMS(1991) 58C27/CLC O192
文献标识码：A **文章编号**：1000-341X(2001)01-0123-06

奇点理论的一个重要的研究方向就是讨论映射芽的零点集的拓扑性质. 这一问题在七十年代初由 Thom 等人提出，并得到一些很好的结果，特别是 Kuo[1] 给出的方法很有效. P. B. Percell 等[4] 将Kuo 的方法应用于分支问题中，给出了分支问题是 V- 充分性的判别条件，而 L. Paunescu[2],[3] 利用奇异黎曼度量推广了 Kuo 的有关结果，本文则把奇异黎曼度量应用于分支问题中，给出分支问题是 $d=(d_1,d_2,\cdots,d_p)$ 充分性的判别条件，当黎曼度量转化为通常的欧氏度量时，我们的结果适合于通常的分支问题，从而推广了文献[2]，[4] 中的相关结果.

1 定义及结果

设 $f:(R^n\times R^l,0)\to(R^p,0)$ 是 C^2 映射芽，一个分支问题是指一簇映射芽 $f(\cdot,\lambda):(R^n,0)\to(R^p,0)$，其中 $\lambda\in R^l$ 为分支参数，f 的零点集 $f^{-1}(0)$ 称为 f 的分支图.

定义1 设 $f,g:(R^n,\times R^l,0)\to(R^p,0)$ 是 C^2 映射芽，若存在原点的邻域 $V\subset R^n\times R^l$ 和保持参数水平的同胚映射芽 $\varphi:(V,0)\to(R^n,\times R^l,0)$ 使得

$$\varphi(f^{-1}(0)\frown V)=g^{-1}(0)\frown\varphi(V),$$

则称 f 和 g 是分支图等价的. 其中保持参数水平的同胚映射芽是指如下映射：

$$\varphi:(V,0)\to(R^n\times R^l,0),$$
$$(x,\lambda)\to(\varphi_1(x,\lambda),\lambda),\quad x\in(R^n,0),\lambda\in(R^l,0)$$

设 $\omega=(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n,\omega_{n+1},\cdots,\omega_{n+l})$，对任何 $i,\omega_i>0,\mu=(x,\lambda)\in R^n\times R^l$，对于任何正数 q，在 $R^n\times R^l$ 上定义函数

* 收稿日期：1998-01-05
作者简介：高守平(1965-)，男，在读博士生，副教授.
E-mail：Gaoshoup@163. net

$$\rho=\rho(\mu)=(\sum_{i=1}^{n+l}\mu_i^{2q_i})^{\frac{1}{2q}}=(\sum_{i=1}^{n}x_i^{2q_i}+\sum_{j=n+1}^{n+l}\lambda_{j-n}^{2q_j})^{\frac{1}{2q}},$$

其中 $q_i=q/\omega_i,1\leqslant i\leq n+l$.

定义 2 利以上 ρ,在 $R^n\times R^l$ 上定义异黎曼度量如下:

$$\langle\frac{\partial}{\partial\mu_i},\frac{\partial}{\partial\mu_i}\rangle=\rho^{-2\omega_i},\ \langle\frac{\partial}{\partial\mu_i},\frac{\partial}{\partial\mu_j}\rangle=0,\ 1\leqslant i,j\leqslant n+l,i\neq j.$$

对于以上度量,有相应的梯度 ∇_ω 和范数 $\|\ \|_\omega$,对于 $f:(R^n\times R^l,0)\to R$,即当 f 是函数芽时,

$$\nabla_\omega=\sum_{i=1}^{n+l}\rho^{\omega_i}\frac{\partial f}{\partial\mu_i}\rho^{\omega_i}\frac{\partial}{\partial\mu_i},\quad\|\nabla_\omega f\|_\omega^2=\sum_{i=1}^{n+l}(\rho^{\omega_i}\frac{\partial f}{\partial\mu_i})^2.$$

对于 $f:(R^n\times R^l,0)\to(R^p,0)$,$f$ 的每个分量函数 $f_i(i=1,2,\cdots,p)$ 在 $\mu=(x,\lambda)\in(R^n\times R^l,0)$ 处关于 x 的梯度向量函数记为 $\nabla_x f_i(\mu)=\sum_{j=1}^{n}\rho^{\omega_j}\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mu)\rho^{\omega_j}\frac{\partial}{\partial x_j}$.

定义 3 设 $d=(d_1,d_2,\cdots,d_p)\in R^P,d_i>0,i=1,2,\cdots,p$,我们说 $f,g(R^n\times R^l,0)\to(R^p,0)$ 是 $\omega-$ 加权 $d-$ 等价的,如果存在原点的邻域 $U\subset R^n\times R^l$ 使得

(1) $f_j(\mu)-g_j(\mu)=o(\rho^{d_j})$;

(2) $\frac{\partial f_j}{\partial x_k}(\mu)-\frac{\partial g_j}{\partial x_k}(\mu)=o(\rho^{d_j-\omega_k}),1\leqslant k\leqslant n,1\leqslant j\leqslant p,\mu\in U$.

定义 4 设 $f:(R^n\times R^l,0)\to(R^p,0)$ 是 C^2 映射芽,如果对于任意的 C^2 映射芽 $P:(R^n\times R^l,0)\to(R^p,0)$,只要 f 与 $f+P$ 是 ω- 加权 d 等价的,就有 f 与 $f+P$ 是分支图等价的,我们就说 f 是 ω- 加权 d- 充分的.

定义 5 f 的 ω- 加权 d 阶角形邻域定义如下:

$$H_d(f,c)=\{\mu\in R^n\times R^l:|f_j(\mu)|\leqslant c\rho^{d_j};1\leqslant j\leqslant p\},$$

其中 $c>0$ 称为角形邻域的宽度.

定义 6 设 $f:(R^n\times R^l,0)\to(R^p,0)$ 是 C^2 映射芽,用 $N(f,i,\mu)$ 表示向量 $\nabla_\omega f_i(\mu)-h_i(\mu),i=1,2,\cdots,p$,这里 $h_i(\mu)$ 表示向量 $\nabla_\omega f_i(\mu)$ 到 $p-1$ 个向量 $\nabla_\omega f_j(\mu),1\leqslant j\leqslant p,j\neq i$ 所生成的子空间的投影,则 $\|N(f,i,\mu)\|_\omega$ 表示 $\nabla_\omega f_i(\mu)$ 的端点到 $p-1$ 个向量 $\nabla_\omega f_j(\mu)$,$1\leqslant j\leqslant p,j\neq i$ 所生成的子空间的距离.如果只考虑对 x 分量的偏导数,则相应有 $N(f,i,x)=\nabla_x f_i(\mu)-h_i(\mu)$ 和 $\|N(f,i,x)\|_\omega$.

本文的主要结果是:

定理 设 $f:(R^n\times R^l,0)\to(R^p,0)$ 是 C^2 映射芽,若存在 $\varepsilon>0,c>0,d=(d_1,d_2,\cdots,d_p),d_i>0$,和原点的邻域 U 使得当 $\mu=(x,\lambda)\in H_d(f,c)\frown U$ 时,有

$$\|N(f,i,x)\|_\omega\geqslant\varepsilon\cdot\rho^{d_i}\tag{1}$$

对所有 $i(1\leqslant i\leqslant p)$ 成立,则 f 是 ω- 加权 d- 充分的.

由上述定理得知:

推论 1 设 $f:(R^n,0)\to(R^p,0)$ 是 C^2 映射芽,若存在 $\varepsilon>0,c>0,d=(d_1,d_2,\cdots,d_p)$,$d_i>0$,和原点的邻域 U 使得当 $x=H_d(f,c)\frown U$ 时,有 $\|N(f,i,x)\|_\omega\geq\varepsilon\cdot\rho^{d_i}$,对所有 $i(1\leqslant i\leqslant p)$ 成立,则 f 是 ω- 加权 d 充分的.

这是文献[2]中的结论.

当 $\omega_i=1,i=1,\cdots,n+l,q=1$,度量为通常的欧氏标准范数,容易得出下面的推论:

推论 2　设 $f:(R^n\times R^l,0)\to(R^p,0)$ 是 C^2 映射芽，若存在 $\varepsilon>0,c>0,d=(d_1,d_2,\cdots,d_p),d_i>0$，和原点的邻域 U 使得当 $\mu=(x,\lambda)\in H_d(f,c)\frown U$ 时，有

$$\inf\{\|\alpha^t\rho^{1-d}f_x(\mu)\|:\alpha\in R^p,\|\alpha\|=1\}\geq\varepsilon,\quad \rho=\|\mu\|,$$

则 f 是 BD d- 决定的.

这是文献[4]中的结论.

为证上述定理，需用到以下引理.

引理 1　设 $f:(R^n\times R^l,0)\to(R^p,0)$ 是 C^2 映射芽，$H_d(f,c)$ 为 f 的 ω- 加权 d 阶角形邻域，则一定存在 C^r 函数 $\chi:(R^n\times R^l-\{0\})\to R$，使得对任意 $\mu\in R^n\times R^l-\{0\}$ 均有 $0\leqslant\chi(\mu)\leqslant 1$，且

$$\chi(\mu)=\begin{cases}1, & \mu\in H_d(f,c/2),\\ 0, & \mu\notin H_d(f,c).\end{cases}$$

证明　令 $\alpha:R\to R$ 定义为

$$\alpha(t)=\begin{cases}e^{\frac{-1}{t^2}}, & t>0,\\ 0, & t\leq 0,\end{cases}$$

则 α 为 C^∞ 函数. 令 $\beta:R^p\to R$ 定义为

$$\beta(y)=\frac{\alpha(1-\|y\|)}{\alpha(1-\|y\|)+\alpha(\|y\|-1/2)},$$

这里 $\|y\|=\max\{|y_1|,|y_2|,|\cdots|,y_p|\}$，则 β 为 C^∞ 函数，且 $0\leqslant\beta(y)\leqslant 1$. 当 $\|y\|\leq 1/2$ 时，$\beta(y)\equiv 1$；当 $\|y\|\geqslant 1$ 时，$\beta(y)\equiv 0$. 现定义 $\chi:(R^n\times R^l\text{-}\{0\})\to R$ 为

$$\chi(\mu)=\beta(\frac{f_1}{c\cdot\rho^{d_1}},\frac{f_2}{c\cdot\rho^{d_2}},\cdots,\frac{f_p}{c\cdot\rho^{d_p}}),$$

则当 $\mu\in H_d(f,c/2)$ 时，对每个 i 有 $\|f_i\|\leq c/2\cdot\rho^{d_i}$，从而 $\chi(\mu)\equiv 1$，当 $\mu\notin H_d(f,c)$ 时，必存在一个 i，使得 $|f_i|>c\cdot\rho^{d_i}$，所以 $\chi(\mu)\equiv 0$.

引理 2　设 $f,P:(R^n\times R^l,0)\to(R^p,0)$ 是 C^2 映射芽，且 f 与 $f+P$ 是 ω- 加权 d 等价的，又 f 满足(1)式. 令 C^2 映射芽 $F:(R^n\times R^l,0\times[0,1])\to(R^p,0)$ 定义如下：

$$F(\mu,t)=f(\mu)+tP(\mu)\quad \mu\in R^n\times R^l,t\in[0,1],$$

则一定存在 $R^n\times R^l$ 原点附近的邻域 W，使得当 $(\mu,t)\in[H_d(f,c)\frown W]\times[0,1]$ 时，有

$$\|N(F,i,x)\|_\omega\geqslant\frac{\varepsilon}{2}\rho^{d_i},\quad i=1,2,\cdots,p.$$

证明　首先证明对任何 $i=1,2,\cdots,p$，下式成立

$$\|\nabla_xF_i(\mu,t)-\nabla_xf_i(\mu)\|_\omega\leqslant o(\rho^{d_i}).\tag{2}$$

由 F 的定义和定义 3 知

$$\begin{aligned}\|\nabla_xF_i(\mu,t)-\nabla_xf_i(\mu)\|_\omega&=\|\nabla_x(t\cdot P_i(\mu))\|_\omega\\ &=\|t\cdot\sum_{j=1}^n\rho^{\omega_j}\frac{\partial P_i}{\partial x_j}(\mu)\cdot\rho^{\omega_j}\frac{\partial}{\partial x_j}\|_\omega\\ &=[t^2\sum_{j=1}^n\rho^{2\omega_j}[\frac{\partial P_i}{\partial x_j}(\mu)]^2]^{\frac{1}{2}}\\ &\leqslant|t|\cdot\sum_{j=1}^n\rho^{\omega_j}|\frac{\partial P_i}{\partial x_j}(\mu)|\leqslant o(\rho^{d_i}).\end{aligned}$$

又当 $\lambda_k(\mu,t)\neq 0$ 时,有

$$\frac{\|\lambda_k(\mu,t)\cdot(\nabla_x F_k(\mu,t)-\nabla_x f_k(\mu))\|_\omega}{\|\sum_{i=1}^{p}\lambda_i(\mu,t)\nabla_x f_i(\mu)\|_\omega}=\frac{\|\nabla_x F_k(\mu,t)-\nabla_x f_k(\mu)\|_\omega}{\|\nabla_x f_k(\mu)-\sum_{i=1,i\neq k}^{p}\lambda_i(\mu,t)/\lambda_k(\mu,t)\nabla_x f_i(\mu)\|_\omega}$$

$$\leqslant\frac{o(\rho^{d_k})}{\|N(f,k,x)\|_\omega}\leqslant o(1).$$

因此存在原点的一个充分小的邻域 W,当 $(\mu,t)\in(H_d(f,c)\frown W)\times[0,1]$ 时有

$$\|\nabla_x F_k(\mu,t)-\sum_{i=1,i\neq k}^{p}\lambda_i(\mu,t)\nabla_x F_i(\mu,t)\|_\omega\geqslant\|\nabla_x f_k(\mu)-\sum_{i=1,i\neq k}^{p}\lambda_i(\mu,t)\nabla_x f_i(\mu)\|_\omega$$

$$-\|\nabla_x F_k(\mu,t)-\nabla_x f_k(\mu)-\sum_{i=1,i\neq k}^{p}\lambda_i(\mu,t)(\nabla_x F_i(\mu,t)-\nabla_x f_i(\mu))\|_\omega$$

$$\geqslant\frac{1}{2}\|N(f,k,x)\|_\omega.$$

故对所有 $k=1,2,\cdots,p$,有 $\|N(F,k,x)\|_\omega\geq\frac{\varepsilon}{2}\rho^{d_k}$.

2 定理的证明

设 $P:(R^n\times R^l,0)\to(R^p,0)$ 是任一使得 f 与 $f+P$ 是 $\omega-$ 加权 d 等价的映射芽,我们要证明 f 与 $f+P$ 是分支图等价的,为此考虑映射芽 $F:(R^n\times R^l\times R,0)\to(R^p,0)$ 定义如下 $F(\mu,t)=f(\mu)+t\cdot P(\mu),\mu=(x,\lambda)\in R^n\times R^l,t\in R$. 此时在 R^{n+l+1} 上的黎曼度量定义为:

$$\langle\frac{\partial}{\partial\mu_i},\frac{\partial}{\partial\mu_i}\rangle=\rho^{-2\omega_i},\langle\frac{\partial}{\partial\mu_i},\frac{\partial}{\partial\mu_j}\rangle=0,\quad 1\leq i,j\leq n+l,i\neq j,$$

$$\langle\frac{\partial}{\partial\mu_i},\frac{\partial}{\partial t}\rangle=0,\langle\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial t}\rangle=1,\quad 1\leq i\leq n+l.$$

关于这个度量,有

$$\nabla_\omega F_i(\mu,t)=\sum_{j=1}^{n+l}\rho^{\omega_j}[\frac{\partial f_i}{\partial\mu_j}(\mu)+t\cdot\frac{\partial P_i}{\partial\mu_j}(\mu)]\cdot\rho^{\omega_j}\frac{\partial}{\partial\mu_j}+P_i(\mu)\frac{\partial}{\partial t}.$$

我们只须证明 $\{\mu\in R^n\times R^l:F(\mu,0)=0\}$ 与 $\{\mu\in R^n\times R^l:F(\mu,1)=0\}$ 是局部同胚. 为此要构造同胚 Φ.

事实上,可以构造这样的同胚 Φ,它由满足下列条件的向量场芽 $\xi:(R^n\times R^l\times R,0)\to T(R^n\times R^l\times R)$ 的从 $t=0$ 到 $t=1$ 的积分曲线决定

(a) $F'(\mu,t)\cdot\xi(\mu,t)=0$,当 $F(\mu,t)=0$;

(b) $\xi(\mu,t)\cdot\Lambda=0,\Lambda\in\{0\}\times R^l\times\{0\}\subseteq R^n\times R^l\times R$;

(c) $\xi(\mu,t)\cdot\theta=1,\theta\in\{0,0,1\}\times R^n\times R^l\times R$.

令 $N(F,i,x)=\nabla_x F_i(\mu,t)-q_i$,其中 q_i 为 $\nabla_x F_i(\mu,t)$ 在由 $\nabla_x F_j(\mu,t),1\leqslant j\leqslant p,j\neq i$ 所生成的子空间的投影. 为方便起见,用 N_i 表示 $N(F,i,x)$,由于 N_i 是 F_i 只对 x 求偏导数所得,故可以把 N_i 写成下列形式(参见[2],P351)

$$N_i=\sum_{j=1}^{n}\rho^{\omega_j}C_{ji}(\mu,t)\cdot\rho^{\omega_j}\frac{\partial}{\partial x_j},\tag{2.1}$$

其中 C_{ji} 是定义在 $R^n\times R^l\times R-\{0\}$ 上的 C^1 函数芽,且

$$\| N_i \|_\infty^2 = \sum_{j=1}^{n} \rho^{2\omega_j} C_{ji}^2 \geqslant |C_{ji}|^2 \cdot \rho^{2\omega_j}. \tag{2.2}$$

由定义和(2.1)易知

$$\nabla_x F_j \cdot N_i = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ \| N_i \|_\infty^2, & i = j. \end{cases}$$

对于 $c > 0$,定义向量场芽 $\bar{\xi}: (H_d(f,c) \frown W) \times [0,1] \to R^n \times R^l \times R$ 如下:

$$\bar{\xi}(\mu,t) = \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} - \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \dfrac{P_i(\mu)}{\| N_i \|_\infty^2} \cdot N_i, & \mu \neq 0, \\ \dfrac{\partial}{\partial t}, & \mu = 0, \end{cases}$$

即 $\bar{\xi}(\mu,t) = (-\sum_{i=1}^{p} \frac{P_i(\mu)}{\| N_i \|_\infty^2} \cdot N_i, 0, 1)$, $0 \in R^l$. 易知,当 $\mu = (x,\lambda) \in H_d(f,c) \frown W, t \in [0,1]$ 有

$$P_j(\mu) - \sum_{i=1}^{p} P_i(\mu) \nabla_x F_j(\mu,t) \cdot \frac{N_i}{\| N_i \|_\infty^2} = 0.$$

故当 $\mu = (x,\lambda) \in H_d(f,c) \frown W, t \in [0,1]$ 时

$$F'(\mu,t) \cdot \bar{\xi}(\mu,t) = 0 \tag{2.3}$$

显然 $\bar{\xi}(\mu,t)$ 满足(a),(b),(c),而且由定义 3 和引理 3 更有

$$\| \bar{\xi}(\mu,t) - \theta \|_\infty = \| \sum_{i=1}^{p} \frac{P_i(\mu)}{\| N_i \|_\infty^2} N_i \|_\infty \leqslant \sum_{i=1}^{p} \frac{|P_i(\mu)|}{\| N_i \|_\infty} \leqslant \frac{2p}{\varepsilon} o(1).$$

故 $\lim\limits_{\mu \to \infty} \bar{\xi}(\mu,t) = \theta$(对于 t 是一致的).

由(2.1)知

$$\bar{\xi}(\mu,t) = \frac{\partial}{\partial t} - \sum_{j=1}^{n} \left[\sum_{i=1}^{p} \frac{P_i \cdot C_{ji}}{\| N_i \|_\infty^2} \right] \cdot \rho^{2\omega_j} \cdot \frac{\partial}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial t} - \sum_{j=1}^{n} X_j \cdot \frac{\partial}{\partial x_j},$$

这里 $X_j = \sum_{i=1}^{p} \frac{P_i \cdot C_{ji}}{\| N_i \|_\infty^2} \cdot \rho^{2\omega_j}$,且由(2.2)知,当 $(\mu,t) \in (H_d(f,c) \frown W) \times [0,1]$ 时,一定存在某个 $c_j > 0$ 使得下式成立

$$|X_j| \leqslant \sum_{i=1}^{p} \frac{|P_i|}{\| N_i \|_\infty} \cdot \frac{|C_{ji} \rho^{\omega_j}|}{\| N_i \|_\infty} \rho^{\omega_j} \leq c_j \rho^{\omega_j}, \quad j = 1,2,\cdots,n. \tag{2.4}$$

所以 $\lim\limits_{\mu \to \infty} X_j = 0$.

在 $(H_d(f,c) \frown W) \times [0,1]$ 上定义向量场芽如下:

$$\xi(\mu,t) = \begin{cases} \chi(\mu) \cdot \bar{\xi}(\mu,t) + (1 - \chi(\mu)) \cdot \theta, & \mu \neq 0, \\ \theta, & \mu = 0. \end{cases}$$

显然 $\xi(\mu,t)$ 在 $(H_d(f,c) \frown W - \{0\}) \times [0,1]$ 上是 C^1 的,且 $\lim\limits_{\mu \to \infty} \xi(\mu,t) = \xi(0,t) = \theta$,故 ξ 在 $(H_d(f,c) \frown W) \times [0,1]$ 上连续.

由(2.3)知当 $(\mu,t) \in (H_d(f,c) \frown W) \times [0,1]$ 时有 $F'(\mu,t) \cdot \xi(\mu,t) = 0$,又当 $(\mu,t) \in F^{-1}(0) \frown W$ 时,有 $(\mu,t) \in (H_d(f,c) \frown W) \times [0,1]$,这样我们可以在原点的充分小的邻域 W,保证 $\xi(\mu,t)$ 满足(a),(b),(c).

下证由 $\xi(\mu,t)$ 所定义的积分曲线是唯一的. 由于 $\xi(\mu,t)$ 在 $(H_d(f,c) \frown W) - \{0\} \times [0,1]$

上是 C^1 的，由常微分方程的基本定理知，对于 t 轴外的每一点处都存在唯一的一条积分曲线. 下面考虑两个 Liapounov 函数

$$U(\mu,t)=e^{2Lt}\rho^2,\quad V(\mu,t)=e^{-2Lt}\rho^2.$$

经计算，对足够大的 L，有

$$\nabla U(\mu,t)\cdot\xi(\mu,t)>0,\quad \mu\neq 0, \tag{2.5}$$

$$\nabla V(\mu,t)\cdot\xi(\mu,t)<0,\quad \mu=0, \tag{2.6}$$

所以根据 Liapounov 判别法知道，向量场 $\xi(\mu,t)$ 在 $(H_d(f,c)\frown W-\{0\})\times[0,1]$ 的积分曲线不可能与 t 轴相交(由 2.5)，即通过 t 轴以外的任一点的积分曲线不可能进入 t 轴，而由(2.6)知过 t 轴上的一点积分曲线不可能离开 t 轴，故通过 t 轴上每一点的积分曲线只能是 t 轴. 于是，由局部流理论知，存在唯一的一条积分曲线 $\varphi(\mu,t)$ 满足初始条件 $\varphi(\mu,0)=\mu$，显然 $\varphi(\mu,t)$ 在 $\mu\neq 0$ 时是连续的，而 $\varphi(\mu,t)$ 在 $\mu=0$ 时的连续可由(2.6)得知.

这样，选取原点的充分小的邻域 $V\subset W$，定义 $\Psi:V\times[0,1]\to W\times[0,1]$ 是通过 $(\mu,0)$ 的积分曲线 $t\to\Psi(\mu,t)$，则 Ψ 是 $V\times[0,1]$ 到其像的一个同胚，由(c)知 $\Psi(\mu,t)=(\overline{\Psi}(\mu,t),t)\in R^{n+1}\times R$. 定义 $\Phi:V\to W$ 如下：$\Phi(\mu)=\overline{\Psi}(\mu,1)$，则 Φ 是 V 到 $\Phi(V)$ 的一个同胚. 由(b)知，$\Phi(\mu)=(\Phi_1(\mu),\lambda)$. 由(a)知 Φ 把 $F(\mu,0)=0$ 的点集同胚地映成 $F(\mu,1)=0$ 的点集($\mu\in f^{-1}(0)\frown V$). 从而完成定理的证明.

参考文献：

[1] KUO T C. *Characterization of v-sufficiency of jets* [J]. Topology, 1972, **11**: 115—131.

[2] PAUNESCU L. *v-sufficiency from the weighted point of view* [J]. J. Math. Soc. Japan, 1994, **46** (2): 345—354.

[3] PAUNESCU L. *A weighted verson of the Kuiper-Kuo-Bochnak-Lojasiewicz theorem* [J]. J. Algebraic Geometry, 1993, **2**: 69—79.

[4] BERCELL P and BROWN P N. *Finite determination of bifurcation problems* [J]. SIAM. J. Math. Anal., 1985, **16**: 28—46.

[5] 孙伟志. 分支问题中的 C^0 接触等价 K 决定性 [J]. 数学学报, 1993, **36**(5).
SUN Wei-zhi. *K-determinacy of C^0 contact equivalence of Bifurcation problems* [J]. Acta Math. Sinica, 1993, **36**(5).

d- Sufficiency of Bifurcation Problems under Singular Riemannian Metric

GAO Shou-ping

(Dept. of Appl. Math., Tongji University, Shanghai, 200092, China)

Abstract: In this paper, We shall give a characterization of d-sufficiency of bifurcation problems. Some results in [2],[4]will be generalized.

Key words: map-germ; ω-weighted d-equivalent; ω-weighted d-sufficient.