第21卷第1期
2001年2月
数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION
Vol. 21 No. 1
Feb. 2001

四元数积的弱可交换性及其一个应用*

吴世锦
(黔东南师范高等专科学校，云南 556000)

摘　要：用向量表示四元数.得到四元数乘积的一个弱可交换律，并利用它将四元数体上线性矩阵方程转化为数域上的线性方程组，给出此类方程的一般解法.

关键词：四元数积；弱可交换；矩阵方程.
分类号：AMS(1991) 15A69/CLC O151.23
文献标识码：A　　　**文章编号**：1000-341X(2001)01-0139-04

0 引　言

把域上的结论移植到体上，或在体上进一步拓展，是近代代数学研究的一重要方面.但因受体上元素乘法非交换性的制约，不少问题难以实现.其中，有相当一部分是因其作梗而无捷径或未能达到目的.本文给出四元数乘法的一个弱可交换律，并运用这个交换律，导出四元数体上线性矩阵方程的一般解法，作为其诸用途之序.

本文约定，R 及 $\mathscr{K}$ 分别表示实数域及四元数体，R^n 表示 R 上的 n 维向量集，$R^{m\times n}$，$\mathscr{K}^{m\times n}$，分别为 R 及 $\mathscr{K}$ 上的 $m\times n$ 级矩阵集，I_n 为 n 阶单位矩阵，$[a_{ij}]_{m\times n}$(或$[a_{ij}]$)表示 $m\times n$ 级矩阵，$(a_j)_n$(或(a_j))表示 n 维向量，$r(A)$ 表示实矩阵 A 的秩，x^* 表示四元数 x 的共轭，A^* 表示矩阵 A 的共轭转置.

定义1　设 $A_{ij}(i=1,2,\cdots,s,\quad j=1,2,\cdots t)$ 为同级矩阵，称 $[A_{ij}]$ 为块元矩阵.当 $[A_{ij}]$ 仅为一行块元矩阵时也称为矩阵向量，并写成 (A_j).

向量(矩阵或块元矩阵) X 的转置记为 X'. $\alpha+\beta, k\alpha, AB$ 表示数、向量及矩阵间通常加法、数乘及矩阵乘法运算.并将数与向量(矩阵)的数乘运算扩充为向量(或矩阵)与块元矩阵的乘法，即向量(矩阵) α 与块元矩阵 $[A_{ij}]$ 的积规定为 $\alpha[A_{ij}]=[\alpha A_{ij}]$，右乘也类似.

定义2　设 $A=[a_{ij}], B=[b_{ij}]$ 为数阵或块元矩阵. A 与 B 的张量积规定为 $A\otimes B=[a_{ij}B]$.

定义3　设 α,β,γ 为向量，且 $\alpha=(a_j)_t$；$A=(A_j)_t$ 为矩阵向量.规定 $\alpha\triangle A=\sum\limits_{j=1}^{t}a_jA_j$，且记 $(\alpha\triangle A,\beta\triangle A,\cdots,\gamma\triangle A)=(\alpha,\beta,\cdots,\gamma)\triangle A$ 或 $(\alpha\triangle A,\beta\triangle A,\cdots,\gamma\triangle A)'=(\alpha,\beta,\cdots,\gamma)'\triangle A$.

* 收稿日期：1997-05-26；修订日期：1999-06-10
作者简介：吴世锦(1960-)，男，侗族，黔东南师专副教授.

1　四元数积的弱可交换性

把实四元数 $x = x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k (x_i \in R)$ 的分量组成的向量记成 (x_i)，并用 $\tilde{x}$ 表示. 若 $A = [x_{ij}] \in \mathscr{X}^{m \times n}$，用 $\tilde{A}$ 表示 $[\tilde{x}_{ij}]$. 显然，对通常加法和数乘 $\mathscr{X}$ 与 R^4 为同构的线性实空间.

定义 4　把矩阵组

$$\varepsilon_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \varepsilon_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\varepsilon_j = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \varepsilon_k = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

称为四元数 x 与 y 乘积的基阵，且记 $\varepsilon_+ = (\varepsilon_h), \varepsilon_- = (\varepsilon_h') \ (h = 1, i, j, k)$.

定理 1　设 $x, y, z \in \mathscr{X}$，则

1) $\widetilde{xy} = \tilde{x}\,\varepsilon_+\,\tilde{y}' = \tilde{y}\,\varepsilon_-\,\tilde{x}'$ 或 $\widetilde{xy}' = \tilde{x}\,\varepsilon'_+\,\tilde{y}' = \tilde{y}\,\varepsilon'_-\,\tilde{x}'$.

2) $\widetilde{xyz} = (\tilde{x}\,\varepsilon_+\,\tilde{y}')\varepsilon_+\,\tilde{z}' = \tilde{x}\,\varepsilon_+\,(\tilde{y}\,\varepsilon'_+\,\tilde{z}') = \tilde{z}\,(\tilde{x}\,\varepsilon_+ \triangle \varepsilon_-)\tilde{y}' = \tilde{x}\,(\tilde{z}\,\varepsilon_- \triangle \varepsilon_+)\tilde{y}'$

或

$$\widetilde{xyz}' = \tilde{z}\,(\tilde{x}\,\varepsilon'_+ \triangle \varepsilon_-)\tilde{y}' = \tilde{x}\,(\tilde{z}\,\varepsilon'_- \triangle \varepsilon_+)\tilde{y}'.$$

3) $\widetilde{x^*} = \tilde{x}\,\varepsilon_1$ 或 $\widetilde{x^*}' = \varepsilon_1 \tilde{x}'$.

证明　显然，只要证明行表示之情形便知列表示之情形也成立

设 $x = x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k, y = y_0 + y_1 i + y_2 j + y_3 k, z = z_0 + z_1 i + z_2 j + z_3 k, x_l, y_l, z_l \in R (l = 0, 1, 2, 3)$，则

$$\begin{aligned} xy &= (x_0 y_0 - x_1 y_1 - x_2 y_2 - x_3 y_3) + (x_0 y_1 + x_1 y_0 + x_2 y_3 - x_3 y_2) i + \\ &\quad (x_0 y_2 + x_2 y_0 + x_3 y_1 - x_1 y_3) j + (x_0 y_3 + x_3 y_0 + x_1 y_2 - x_2 y_1) k \\ &= \tilde{x}\varepsilon_1 \tilde{y}' + \tilde{x}\varepsilon_i \tilde{y}' i + \tilde{x}\varepsilon_j \tilde{y}' j + \tilde{x}\varepsilon_k \tilde{y}' k, \end{aligned}$$

所以

$$\widetilde{xy} = (\tilde{x}\varepsilon_1 \tilde{y}', \tilde{x}\varepsilon_i \tilde{y}', \tilde{x}\varepsilon_j \tilde{y}', \tilde{x}\varepsilon_k \tilde{y}') = \tilde{x}(\varepsilon_1, \varepsilon_i, \varepsilon_j, \varepsilon_k)\tilde{y}' = \tilde{x}\varepsilon_+ \tilde{y}'.$$

同理，得 $\widetilde{yx} = \tilde{x}\varepsilon_- \tilde{y}'$.

2)的前部分及 3)是显然的. 下再证 2)的后半部分.

$$\begin{aligned} \widetilde{xyz} &= \widetilde{(xy)z} = \tilde{z}\varepsilon_-(\tilde{x}\varepsilon_+ \tilde{y}')' = \tilde{z}\varepsilon_-(\tilde{x}\varepsilon'_+ \tilde{y}') \\ &= (\tilde{z}\varepsilon'_1(\tilde{x}\varepsilon'_+ \tilde{y}'), \tilde{z}\varepsilon'_i(\tilde{x}\varepsilon'_+ \tilde{y}'), \tilde{z}\varepsilon'_j(\tilde{x}\varepsilon'_+ \tilde{y}'), \tilde{z}\varepsilon'_k(\tilde{x}\varepsilon'_+ \tilde{y}')) \\ &= (\tilde{x}(\tilde{z}\varepsilon_1' \triangle \varepsilon_+)\tilde{y}', \tilde{x}(\tilde{z}\varepsilon_i' \triangle \varepsilon_+)\tilde{y}', \tilde{x}(\tilde{z}\varepsilon_j' \triangle \varepsilon_+)\tilde{y}', \tilde{x}(\tilde{z}\varepsilon_k' \triangle \varepsilon_+)\tilde{y}') \\ &= \tilde{x}(\tilde{z}\varepsilon_- \triangle \varepsilon_+)\tilde{y}'. \end{aligned}$$

同理 $\widetilde{xyz} = \widetilde{x(yz)} = \tilde{x}\varepsilon_+(\tilde{z}\varepsilon'_- \tilde{y}') = \tilde{z}(\tilde{x}\varepsilon_+ \triangle \varepsilon_-)\tilde{y}'$.

2 四元数体上的线性矩阵方程的解

定义 5 设 $A=[a_{ij}]\in\mathscr{K}^{m\times n}$,把 $4mn$ 维列向量 $(\tilde{a}'_{11},\cdots,\tilde{a}'_{m1},\cdots,\tilde{a}'_{mn})'$ 称为 $\mathscr{K}$ 上矩阵 A 的生成向量,记作 $\tilde{A}^{g}$,且变换 g 的逆用 $-g$ 表示,即 $(\tilde{A}^{g})^{-g}=\tilde{A}$.

定理 2 设 $A\in\mathscr{K}^{m\times n},B\in\mathscr{K}^{s\times t},C\in\mathscr{K}^{m\times t}$,则方程

$$AXB=C \tag{1}$$

有解的充要条件是 $r([\tilde{B}'\otimes\tilde{A}\otimes\epsilon'_{+}+\triangle\epsilon_{-},\tilde{C}^{g}])=r(\tilde{B}'\otimes\tilde{A}\otimes\epsilon'_{+}+\triangle\epsilon_{-})$,且当(1)有解时,其解可由实数域上的线性方程组

$$(\tilde{B}'\otimes\tilde{A}\otimes\epsilon'_{+}+\triangle\epsilon_{-})X=\tilde{C}^{g} \tag{2}$$

的解导出.

证明 $A=[a_{ij}],B=[b_{ij}],X=[x_{ij}]$,则

$$\widetilde{AXB}=[\sum_{r=1}^{s}\sum_{k=1}^{n}\widetilde{a_{ik}x_{kr}b_{rj}}]=[\sum_{r=1}^{s}\sum_{k=1}^{n}\tilde{b}_{rj}(\tilde{a}_{ik}\epsilon_{+}\triangle\epsilon_{-})\tilde{x}'_{kr}]=\tilde{C}.$$

将后一等式作 g 变换,得

$$\begin{bmatrix}\tilde{b}_{11}\tilde{A}\otimes\epsilon'_{+}\triangle\epsilon_{-} & \cdots & \tilde{b}_{s1}\tilde{A}\otimes\epsilon_{+}'\triangle\epsilon_{-}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \tilde{b}_{1t}\tilde{A}\otimes\epsilon'_{+}\triangle\epsilon_{-} & \cdots & \tilde{b}_{st}\tilde{A}\otimes\epsilon'_{+}\triangle\epsilon_{-}\end{bmatrix}\tilde{X}^{g}=\tilde{C}^{g},$$

即

$$(\tilde{B}'\otimes\tilde{A}\otimes\epsilon'_{+}+\triangle\epsilon_{-})\tilde{X}^{g}=\tilde{C}^{g}.$$

由实系数线性方程组有解的充要条件知定理结论成立.

在上面,分别令 $A=I_m,B=I_n$,并 X 把换成 X^{*},还可得到下列结论.

定理 3 设 $A\in\mathscr{K}^{m\times m},B\in\mathscr{K}^{n\times n},C\in\mathscr{K}^{m\times n}$,则方程

$$AX+XB=C \tag{3}$$

有解的充要条件是

$$r([I_n\otimes\tilde{A}\otimes\epsilon_{+}'+\tilde{B}'\otimes(I_m\otimes\epsilon_{-}'),\tilde{C}^{g}])=r(I_n\otimes\tilde{A}\otimes\epsilon_{+}'+\tilde{B}'\otimes(I_m\otimes\epsilon_{-}')).$$

且当(3)有解时,其解可由实系数方程组

$$I_n\otimes\tilde{A}\otimes\epsilon_{+}'+\tilde{B}'\otimes(I_m\otimes\epsilon_{-}'))X=\tilde{C}^{g} \tag{4}$$

的解导出.

定理 4 设 $A,B,C\in\mathscr{K}^{n\times n}$,则方程

$$AX+X^{*}B=C, \tag{5}$$

有解的充要条件是

$$r\left[\left[I_n\otimes\tilde{A}\otimes\epsilon_{+}'+\begin{bmatrix}I_n\otimes\tilde{B}'_{(1)}\otimes\epsilon'_{-}\epsilon_1\\ \cdots\cdots\\ I_n\otimes\tilde{B}'_{(n)}\otimes\epsilon'_{-}\epsilon_1\end{bmatrix},\tilde{C}^{g}\right]\right]=r\left[I_n\otimes\tilde{A}\otimes\epsilon_{+}'+\begin{bmatrix}I_n\otimes\tilde{B}'_{(1)}\otimes\epsilon'_{-}\epsilon_1\\ \cdots\cdots\\ I_n\otimes\tilde{B}'_{(n)}\otimes\epsilon'_{-}\epsilon_1\end{bmatrix}\right]$$

且当(5)有解时,其解由 R 上线性方程组

$$\left[I_n \otimes \tilde{A} \otimes \varepsilon_+ ' + \begin{bmatrix} I_n \otimes \tilde{B}'_{(1)} \otimes \varepsilon'_- \varepsilon_1 \\ \cdots\cdots \\ I_n \otimes \tilde{B}'_{(n)} \otimes \varepsilon'_- \varepsilon_1 \end{bmatrix} \right] X = \tilde{C}^{\varepsilon} \tag{6}$$

的解导出(其中 $\tilde{B}_{(j)}$,为 $\tilde{B}$的第 j 列矩阵向量).

由于(2)、(4)、(6)的通解是熟知的,因而只须分别将它们的通解求变换 g 的逆即可得(1),(3),(5)的通解.

类似地,可继续讨论型如 $\sum_{i=1}^{n} A_i X B_i = C$ 或 $\sum_{k=1}^{s} A_k X B_k + \sum_{r=1}^{t} A_r X^* B_r = C$ 等方程.并且,若将实四元数体,实矩阵的秩,实线性方程组等有关概念都平移到任一数域,则本文的所有结论便可移植到相应体上,此略.

参考文献:

[1] KHATRI C G and MITRA S K. *Hermitian and nonnegative definite solutions of linear matrix equations* [J]. SIAMJ. Appl. Math., 1976, **31**: 579—585.

[2] BAKSALARY J K. *Nonnegative definite and positive definite solutions to the matrix equation* $AXA^* = B$. [J]. Linear and Multilinear Algebra. 1984, **16**: 133—139.

[3] 庄瓦金. 四元数体上的矩阵方程 [J]. 数学学报, 1987, **30**(5): 688—694.
ZHUANG Wa-jin. *Matrix equations over a quaternion field* [J]. Acta. Math. Sinica, 1987, **30**(5): 688—694.

[4] 王卿文. 关于体上矩阵方程 $A_{m\times n}X_{n\times s}=B_{m\times s}$的解 [J]. 数学研究与评论, 1995, **15**(2): 249—252.
WANG Qing-wen. *On solution of the matrix equation* $A_{m\times n}X_{n\times s}=B_{m\times s}$*, over a skew field* [J]. J. of Math. Res. & Expo., 1995, **15**(2): 249—252.

[5] 王卿文. 体上矩阵方程 $AXA^*=B$. [J]. 数学杂志, 1996, **16**(2): 157—162.
WANG Qing-wen. *The matrix equation* $AXA^* =B$ *over a skew field* [J]. J. of Math (PRC), 1996, **16**(2): 157—162.

The Weakly Exchangeable Property of Quaternion Product and an Application

WU Shi-jin

(Southeast Guizhou National Teachers' College, Yunnan 556000, China)

Abstract: This paper gets a weakly exchangeable law of quaternion product by means of quaternion to be expressed vector. And by it, we turn linear matrix equation over quaternion field into linear equations over a number field, and obtain normal solutions of this kind of equation.

Key words: quaternion product; weakly exchangeable; matrix equation.