第21卷第3期 数学研究与评论 Vol.21 No.3
2001年8月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Aug.2001

一类平面非线性系统无闭轨的充分条件*

曾 志 刚
(湖北师范学院数学系,湖北 黄石 435002)

摘 要:本文建立了一类平面非线性系统无闭轨的若干充分条件.

关键词:闭轨;正(负)半轨;平衡点.
分类号:AMS(1991) 34C05/CLC O175
文献标识码:A **文章编号**:1000-341X(2001)03-0394-05

文[1,2]和[3,4]在假定 $xF(x)\geq 0$ 的前提下,分别研究了 Lienard 系统

$$\begin{cases}\dot{x}=y-F(x)\\ \dot{y}=-g(x)\end{cases}\tag{1}$$

和广义 Lienard 系统

$$\begin{cases}\dot{x}=h(y)-F(x)\\ \dot{y}=-g(x)\end{cases}\tag{2}$$

的非平凡周期解的不存在性,最近文[5]讨论了

$$\begin{cases}\dot{x}=\Phi(h(y)-F(x))\\ \dot{y}=-g(x)\end{cases}\tag{3}$$

同宿轨族的存在性,本文放宽 $F(x)$ 的限制,得到了系统(3)无闭轨的若干充分条件.本文总假定系统(3)初值问题的解存在唯一,仅有(0,0)为平衡点,$h(\cdot),\Phi(\cdot),F(\cdot),g(\cdot)\in C^0(-\infty,+\infty)$,且 $h(\cdot),\Phi(\cdot)$ 严格单调增.当 $x\neq 0$ 时,$xg(x)>0$.

引理1 若系统(3)满足:

(i) 存在连续函数 $m(x)$,使 $m(x)<F(x),x>0$;

(ii) 存在常数 $c<h^{-1}(m(0))$,使

$$\int_0^x\frac{-g(s)}{\Phi(m(s)-F(s))}ds\leq h^{-1}(m(x))-c,\quad x>0,\tag{4}$$

则系统(3)过点 $(0,c)$ 的负半轨必与垂直等倾线 $y=h^{-1}(F(x))$ 不相交.

证明 设系统(3)过点 $(0,c)$ 的负半轨方程为 $y=y(x)$,由条件(ii)

$$y(0)=c<h^{-1}(m(0)).$$

---

* 收稿日期:1998-06-19
作者简介:曾志刚(1971-),男,湖北枣阳县人,硕士,讲师.
E-mail: zzg0616@263.net

若负半轨与曲线 $y=h^{-1}(m(x))$ 相交，则当 t 减小时，存在 $x_1>0$ 使得

$$y(x_1)=h^{-1}(m(x_1)),$$

且 $y(x)<h^{-1}(m(x))$，对 $0\le x<x_1$，所以

$$\begin{aligned}h^{-1}(m(x_1))-c=y(x_1)-y(0)&=\int_0^{x_1}\frac{-g(s)}{\Phi(h(y(s))-F(s))}\mathrm{d}s\\&<\int_0^{x_1}\frac{-g(s)}{\Phi(m(s)-F(s))}\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

这与(4)式矛盾，故结论成立．

引理 2 若系统(3)满足：

(iii) 存在连续函数 $n(x)$，使 $n(x)>F(x),x<0$；

(iv) 存在 $c'>h^{-1}(n(0))$ 使 $\int_x^0\frac{-g(s)}{\Phi(n(s)-F(s))}\mathrm{d}s\leqslant c'-h^{-1}(n(x)),x<0$，

则系统(3)过点$(0,c')$的负半轨必与垂直等倾线 $y=h^{-1}(F(x))$ 不相交．

引理 3 若存在 a，$-\infty\leqslant a<0,c<0$ 使

(v) 当 $\inf\limits_{a<x<0}h^{-1}(F(x))>c$ 时

$$\sup_{a<x<0}\left\{\int_0^x\frac{-g(s)}{\Phi(h(c)-F(s))}\mathrm{d}s+c-h^{-1}(F(x))\right\}>0,\tag{5}$$

则系统(3)过点$(0,c)$的正半轨必在 $a<x<0$ 内与 $y=h^{-1}(F(x))$ 相交．

证明 因为当 t 增加时，$x(t)$ 单调减少，$y(t)$ 单调上升，若 $\inf\limits_{a<x<0}h^{-1}(F(x))\leqslant c$，则正半轨必与 $y=h^{-1}(F(x))$ 在 $a<x<0$ 内相交，若 $\inf\limits_{a<x<0}h^{-1}(F(x))>c$，且正半轨在 $a<x<0$ 内不与 $y=h^{-1}(F(x))$ 相交，则当 $a<x<0$ 时，有 $h(y(x))-F(x)<0$

$$\begin{aligned}0>y(x)-h^{-1}(F(x))&=\int_0^x\frac{-g(s)}{\Phi(h(y(s))-F(s))}\mathrm{d}s+c-h^{-1}(F(x))\\&\geqslant\int_0^x\frac{-g(s)}{\Phi(h(c)-F(s))}\mathrm{d}s+c-h^{-1}(F(x)),\end{aligned}$$

这与(5)式矛盾，因此过点$(0,c)$的系统(3)的正半轨必在 $a<x<0$ 内与 $y=h^{-1}(F(x))$ 相交．

引理 4 若存在 $b,0<b\leqslant+\infty,c'>0$ 使

(vi) 当 $\sup\limits_{0<x<b}h^{-1}(F(x))<c'$ 时

$$\inf_{0<x<b}\left\{\int_0^x\frac{-g(s)}{\Phi(h(c')-F(s))}\mathrm{d}s+c'-h^{-1}(F(x))\right\}<0,$$

则系统(3)过点$(0,c')$的正半轨必在 $0<x<b$ 内与 $y=h^{-1}(F(x))$ 相交．

定理 1 若条件(i)－(vi)成立，则系统(3)过点$(0,c)$和点$(0,c')$的解的正半轨必趋于原点或绕原点盘旋，负半轨与 $y=h^{-1}(F(x))$ 不交而趋于无穷远．

证明 因为原点为唯一奇点，由向量场的性质，解的存在唯一性及引理1—引理4知结论成立．

定理 2 若系统(3)满足(i)，(ii)同时

1) 存在 $a<0$，令 $\sup\limits_{a<x<0}F(x)=e_1$，当 $\inf\limits_{a<x<0}h^{-1}(F(x))>c$ 时

$$G(a)>\Phi(h(c)-e_1)(c-h^{-1}(e_1));$$

2) 存在 $b>0$,令 $\inf\limits_{0<x<b} F(x)=e_2$,当 $\sup\limits_{0<x<b} h^{-1}(F(x))<h^{-1}(e_1+\Phi^{-1}(\sqrt{G(a)})+\sqrt{G(a)}$ $\triangleq c'$ 时

$$G(b)>\Phi(e_1-e_2+\Phi^{-1}(\sqrt{G(a)})+\sqrt{G(a)})(c'-h^{-1}(e_2)),$$

则系统(3) 过点 $(0,c)$ 的正半轨必或趋于原点或绕原点盘旋,负半轨与 $y=h^{-1}(F(x))$ 不交而趋于无穷远.

推论 若系统(3) 满足定理 2 的条件,其中 $c=0$,同时

3) 存在连续函数 $m(x)$,使 $0<m(x)<F(x)$,$x<0$;

4) 存在常数 a',$a<a'<0$,任意 $x\in(a',0)$ 有

$$\int_0^x \frac{-g(s)}{\Phi(m(s)-F(s))}\mathrm{d}s\leqslant h^{-1}(m(x)),\quad x<0, \tag{6}$$

则系统(3) 过曲线 $y=h^{-1}(F(x))$,$x\in(a',0)$ 上的任一点的轨线为同宿闭轨.

证明 若系统(3) 过曲线 $y=h^{-1}(F(x))$,$x\in(a',0)$ 上的任一点的轨线的负半轨与负 y 轴相交,设交点为 $(0,d)$,设过点 $(0,d)$ 的正半轨方程为 $y=y(x)$,则正半轨必与 $y=h^{-1}(m(x))$ 在区间 $(a',0)$ 相交,设首次相交交点横坐标为 x_1,则

$$h^{-1}(m(x_1))<h^{-1}(m(x_1))-d=\int_0^{x_1}\frac{-g(s)}{\Phi(h(y(s))-F(s))}\mathrm{d}s<\int_0^{x_1}\frac{-g(s)}{\Phi(m(s)-F(s))}\mathrm{d}s,$$

这与(6) 式矛盾. 由定理 2 知结论成立.

注 1 此时同宿闭轨族位于 x 轴上方.

注 2 在判定同宿闭轨族的存在性时,文[5,7]要求 $F(x)$ 为偶函数或具有某种对称性,本推论放宽了 $F(x)$ 的限制.

定理 3 若系统(3) 满足(iii),(iv) 同时

1′) 存在 $b>0$,令 $\inf\limits_{0<x<b} F(x)=e_2$,当 $\sup\limits_{0<x<b} h^{-1}(F(x))<c'$ 时

$$G(b)>\Phi(h(c')-e_2)(c'-h^{-1}(e_2));$$

2′) 存在 $a<0$,令 $\sup\limits_{a<x<0} F(x)=e_1$,当 $\inf\limits_{a<x<0} h^{-1}(F(x))>h^{-1}(e_2+\Phi^{-1}(-\sqrt{G(b)})-\sqrt{G(b)})\triangleq c$ 时

$$G(a)>\Phi(e_2-e_1+\Phi^{-1}(-\sqrt{G(b)})-\sqrt{G(b)})(c-h^{-1}(e_1)),$$

则系统(3) 过点 $(0,c')$ 的正半轨必或趋于原点或绕原点盘旋,负半轨与 $y=h^{-1}(F(x))$ 不交而趋于无穷远.

注 可类似上面推论给出系统(3) 位于 x 轴下方同宿闭轨族存在的充分条件.

令 $z(x)=\int_0^x g(s)\mathrm{d}s$,当 $x\geqslant 0$,$z(x)=z_1(x)$;当 $x<0$,$z(x)=z_2(x)$,显然 z_1 递增,z_2 递减,令 $u_1(z)$,$u_2(z)$ 分别为其反函数. $F_1(z)=F(u_1(z))$,$F_2(z)=F(u_2(z))$,则在半平面 $z_1>0$ 中,当 $x>0$,系统(3) 等价于

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}=-\Phi(h(y)-F_1(z)); \tag{7}$$

在半平面 $z_2>0$ 中,当 $x<0$ 时,系统(3) 等价于

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}=-\Phi(h(y)-F_2(z)). \tag{8}$$

定理 4 若定理 2(或定理 1 或定理 3) 的条件满足,同时当 $0 < z < \min\{G(a), G(b)\}$ 时, $F_1(z) \geq F_2(z)$ 等号在任何区间上不恒成立. 则系统(3) 无闭轨.

注 若 $xF(x) > 0$,则 $F_1(z) > 0 > F_2(z)$,因此本定理放宽了 $F(x)$ 的限制.

定理 5 若定理 2(或定理 1 或定理 3) 的条件满足,同时当 $x \in (a,b), y \in (c,c')$ 时

$$\Phi(h(y) - F(x)) < y, x > 0, \quad \Phi(h(y) - F(x)) > y, x < 0, \tag{9}$$

则系统(3) 无闭轨.

证明 令 $\lambda(x,y) = \frac{1}{2}y^2 + \int_0^x g(s)\mathrm{d}s$,则 $\mathrm{d}\lambda = y\mathrm{d}y + \mathrm{d}z = (y - \Phi(h(y) - F(x)))\mathrm{d}y$,任取 c_1(或 c_2),$c \leqslant c_1 < 0$(或 $0 < c_2 \leqslant c'$),若过点 $A(0,c_1)$(或点 $A'(0,c_2)$) 的正半轨依次交正(负)y 轴为 B,交负(正)y 轴为 E,则 $\int_{ABE}\mathrm{d}\lambda = \int_{AB}\mathrm{d}\lambda + \int_{BE}\mathrm{d}\lambda < 0$,所以点 E 在点 A 的上(下)方,故当 $c \leqslant y < 0$(或 $0 < y \leqslant c'$) 时系统(3) 不存在闭轨,由定理 2(或定理 1 或定理 3) 知系统(3) 无闭轨.

注 1 若 $\Phi(y) = y, h(y) = y, x \in (a,0) \cup (0,b)$ 时,$xF(x) > 0$,则条件(9) 显然成立.

注 2 文[3,4]没有讨论 $xg(x) < 0$ 的情况,事实上,此时若 $\Phi(\cdot), h(\cdot)$ 严格单调减,则轨线若绕原点盘旋则为逆时针方向,用本文类似方法可以得无闭轨存在的充分条件.

注 3 文[1 - 4] 在研究系统(1) 或系统(2) 的无环性时,均要求原点为渐近稳定,而定理 4,定理 5 则允许存在奇异闭轨,此时,原点为不稳定的.

考虑系统

$$\begin{cases} \dot{x} = y - F(x), \\ \dot{y} = -x^3, \end{cases} \tag{10}$$

其中,当 $x > 0, F(x) = 3x^2$;当 $-1 \leq x < 0, F(x) = 2x^2$;当 $-4 \leq x < -1, F(x) = -2(x+2)^2 + 4$;当 $x < -4$ 时,$F(x) = 2(x+5)^4 - 6$. 取 $m(x) = x^2, x > 0, c = -1$,则

$$\int_0^x \frac{-s^3}{s^2 - 3s^2}\mathrm{d}s = \frac{1}{4}x^2 < x^2 + 1.$$

取 $a = -4, b = 18, c' = 132$,使 $G(b) > c'^2$,当 $x \in (-4,18), y \in (-1,132)$ 时,$0 < z < 64$,

$$F_1(z) = 3\sqrt{4z}, \quad F_2(z) = \begin{cases} 2\sqrt{4z}, & 0 < z \leqslant 1, \\ -2(-\sqrt[4]{4z} + 2)^2 + 4, & 1 < z < 64. \end{cases}$$

由定理 4 知系统(10) 无闭轨.

注 1 因本例不满足 $xF(x) > 0$ 所以不能用文[1 - 4] 判定. 同时

$$\begin{cases} F(x) = F(y) \\ G(x) = G(y), \quad y < 0 < x \end{cases}$$

有解,所以也不能用文[6] 判定在整个平面的无环性.

注 2 显然从 $y = F(x), x \in (-1,0)$ 上出发的轨线均为同宿闭轨,故此时原点也是不稳定的,而文[1 - 4] 在判定无环性时需要原点渐近稳定.

参考文献:

[1] ZHENG Zuo-huan. *On the nonexistence of periodic solutions for Lienard equations* [J]. Nonlinear Anal-

ysis, 1991, **16**(2): 101—110.
[2] 周 进. Liénard方程周期解不存在的充分条件[J]. 应用数学, 1998, **11**(1): 41—43.
ZHOU Jin. *On the sufficient conditions of the nonexistence of periodic solutions for Liénard equations* [J]. Mathematica Applicata, 1998, **11**(1): 41—43. (in Chinese)
[3] 刘 斌. 一类广义Lienard方程无环性的条件[J]. 数学年刊A辑, 1998, **19**(2): 177—180.
LIU Bin. *The conditions of non-existence of limit cycles of a class of generalized Liénard equations* [J]. Chinese Annals of Mathematics, Ser. A, 1998, **19**(2): 177—182. (in Chinese)
[4] 刘 斌, 冯滨鲁, 俞元洪. 广义Liénard系统周期解的不存在性[J]. 应用数学学报, 1998, **21**(2): 233—239.
LIU Bin, FENG Bin-lu, YU Yuan-hong. *Nonexistence of periodic solutions of feneralized Lienard systems* [J]. Acta. Mathematicae Applicatae Sinica, 1998, **21**(2): 233—239. (in Chinese)
[5] 杨启贵, 俞元洪. 一类非线性系统同宿轨族的存在性[J]. 应用数学, 1998, **11**(2): 17—20.
YANG Qi-gui, YU Yuan-hong. *The existence of the family of homoclinic for a class of nonlinear systems* [J]. Mathematica Applicata, 1998, **11**(2): 17—20. (in Chinese)
[6] 蔡燧林, 钱祥征. 常微分方程定性理论引论[M]. 北京: 高等教育出版社, 1994.
CAI Sui-lin, QIAN Xiang-zheng. *Introductory Remarks to the Qualitative Theory of Ordinary Differential Equations* [M]. Beijing: Hight Educational Publishing House Press, 1994. (in Chinese)
[7] 周毓荣, 王向荣. Liénard系统的同宿轨族与闭轨族[J]. 系统科学与数学, 1996, **16**(3): 281—288.
ZHOU Yu-rong, WANG Xiang-rong. *The family of homoclinic and closed orbit of the Liénard's system* [J]. Journal of Systems Science and Mathematical Sciences, 1996, **16**(3): 281—288. (in Chinese)

On the Sufficient Conditions of the Nonexistence of Periodic Solutions for a Planar Nonlinear System

ZENG Zhi-gang
(Dept. of Math., Hubei Normal University, Huangshi 435002, China)

Abstract: In the paper, some sufficient conditions are established for the nonexistence of periodic solutions of a nonlinear system.

Key words: periodic solutions; positive and negative semitrajectory; critical point.